Aufgabe 2.1

Eine Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\ldots$, $\vec{v}_n$ ist die Vektorsumme

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n$$

wobei a_1, a_2, $\ldots$, a_n reelle Zahlen (Skalare) sind.

Aufgabe 2.2

Wenn die Gleichung

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$$

als einzige Lösung $\alpha = \beta = 0$ hat.

Aufgabe 2.3

Wenn die Gleichung

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d} = \vec{0}$$

nicht nur die Lösung $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ hat.

Aufgabe 2.4

- $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{d}$
- $\vec{c} = -\frac{2}{5}\vec{e}$

Aufgabe 2.5

(a) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{GH}$: linear unabhängig

(b) $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{BD}$: linear abhängig: ($\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$)

(c) $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{CA}$: linear unabhängig

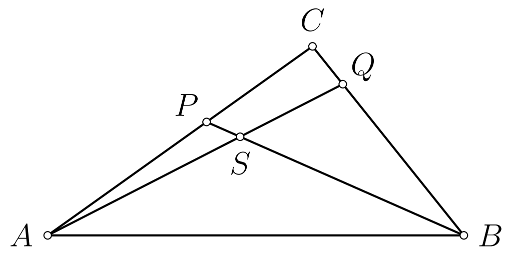
(d) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{EH}$: linear unabhängig

(e) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EG}$: linear abhängig ($\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{EG} = \vec{0}$)

(f) $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{GF}$: linear abhängig ($\overrightarrow{EC} + 2\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{HB} = \vec{0}$)

Aufgabe 2.6

Schritt 0: Skizze



Schritt 1: Zwei linear unabhängige Vektoren wählen:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AC} \quad \vec{b} = \overrightarrow{AB}$$

Schritt 2: Eine geschlossene Vektorkette wählen, die den Punkt S enthält:

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{0}$$

Schritt 3: Die Vektoren der Vektorkette durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AP} = \tfrac{3}{5}\vec{a} \\
&\overrightarrow{PS} = \alpha\overrightarrow{PB} = \alpha\big(-\tfrac{3}{5}\vec{a} + \vec{b}\big) = -\tfrac{3}{5}\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} \\
&\overrightarrow{SA} = \beta\overrightarrow{QA} = \beta\big(\tfrac{1}{5}\overrightarrow{BC} - \vec{a}\big) = \beta\big(\tfrac{1}{5}\big[-\vec{b} + \vec{a}\big] - \vec{a}\big) = -\tfrac{4}{5}\beta\vec{a} - \tfrac{1}{5}\beta\vec{b}
\end{aligned}$$

Schritt 4: In die Vektorkette einsetzen und nach $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ordnen:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SA} &= \overrightarrow{0} \\
\tfrac{3}{5}\vec{a} - \tfrac{3}{5}\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} - \tfrac{4}{5}\beta\vec{a} - \tfrac{1}{5}\beta\vec{b} &= \overrightarrow{0} \\
\big(\tfrac{3}{5} - \tfrac{3}{5}\alpha - \tfrac{4}{5}\beta\big)\vec{a} + \big(-\tfrac{1}{5}\beta + \alpha\big)\vec{b} &= \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

Schritt 5: Die lineare Unabhängigkeit verwenden:

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{5} - \tfrac{3}{5}\alpha - \tfrac{4}{5}\beta &= 0 \\ \alpha - \tfrac{1}{5}\beta &= 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \tfrac{3}{5}\alpha + \tfrac{4}{5}\beta &= \tfrac{3}{5} \\ \alpha - \tfrac{1}{5}\beta &= 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \alpha &= \tfrac{3}{23} \\ \beta &= \tfrac{15}{23} \end{aligned}$$

Schritt 6: Geometrische Interpretation:

- $\overrightarrow{SA} = \frac{15}{23}\overrightarrow{QA} \quad\Rightarrow\quad$ S teilt AQ im Verhältnis $15 : 8$
- $\overrightarrow{PS} = \frac{3}{23}\overrightarrow{PB} \quad\Rightarrow\quad$ S teilt BP im Verhältnis $20 : 3$