Trigonometrie

Theorie (L+)

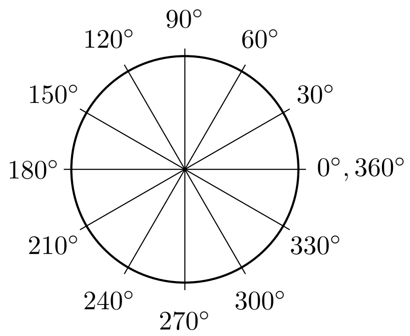
Inhaltsverzeichnis

Version vom 15. November 2019

1 Winkelmasse

1.1 Das Gradmass

Das traditionelle System der Winkelmessung beruht darauf, dass der *volle Winkel* 360° entspricht.



Die Unterteilung des Gradmasses erfolgt im Sexagesimalsystem (60er-System), das seinen Ursprung in der Mathematik der Babylonier (ca. 2000 v. Chr.) hat.

1 Grad = 60 Winkelminuten ($1^\circ = 60'$)

1 Winkelminute = 60 Winkelsekunden ($1' = 60''$)

Beispiel 1.1 (sexagesimal → dezimal)

Stelle $7^\circ\,12'\,54''$ in dezimaler Form dar.

$$7^\circ + \frac{12}{60}^\circ + \frac{54}{3600}^\circ = 7.215^\circ$$

Beispiel 1.2 (dezimal → sexagesimal)

Stelle 22.531° in sexagesimaler Form dar.

Es genügt, jeweils den gebrochenen Anteil zu untersuchen:

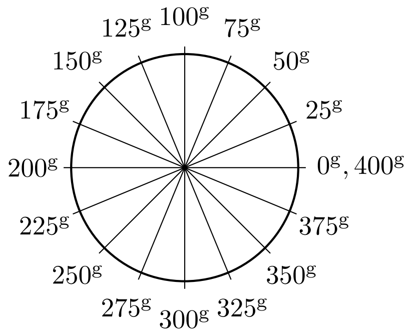
$0.531^\circ = 0.531 \cdot 60' = 31' + 0.86'$

$0.86' = 0.86 \cdot 60'' = 51.6''$

Insgesamt: $22^\circ\,31'\,51.6''$

1.2 Das Gon

Ein anderes System der Winkelmessung, das hauptsächlich im Vermessungswesen angewendet wird, ist das Gon (^{g}). In diesem System entspricht der volle Winkel 400^g.



Bruchteile eines Gon werden im Dezimalsystem dargestellt.

Beispiel 1.3

Rechne $\alpha = 47°$ in Gon um.

$$\alpha = 47° = \frac{47° \cdot 400^g}{360°} \approx 52.2222^g$$

Beispiel 1.4

Stelle $\beta = 52.4^g$ in Grad, Winkelminuten und Winkelsekunden dar.

$$\beta = 52.4^g = \frac{52.4^g \cdot 360°}{400^g} = 47.16°$$

$$0.16 \cdot 60' = 9' + 0.6'$$

$$0.6 \cdot 60'' = 36''$$

$$\beta = 47°\,9'\,36''$$

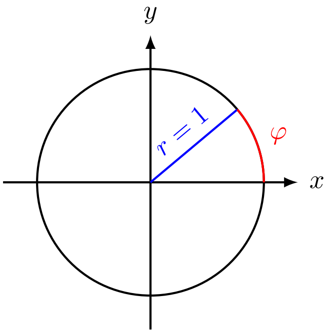
1.3 Das Bogenmass

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass ein Winkelmass willkürlich gewählt werden kann, um damit besondere Aufgaben einfacher lösen zu können.

In diesem Sinne legen wir ein drittes Winkelmass fest, in dem sich die Grösse eines Winkels in der Einheit des zugrunde liegenden Koordinatensystems messen lässt.

Dies ist insbesondere für Anwendungen in der „höheren“ Mathematik von Bedeutung.

Die Idee besteht darin, die Grösse eines Winkels φ durch die Länge des zugehörigen Bogens im *Einheitskreis* auszudrücken. Das ist der Kreis mit dem Mittelpunkt $M = (0,0)$ und dem Radius $r = 1$.



Der volle Winkel entspricht dem Umfang des Einheitskreises: $u = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$

Umrechnungen

Gradmass $\to$ Bogenmass: $\varphi_{\text{rad}} = \varphi_{\text{deg}} \cdot \dfrac{2\pi}{360°} = \varphi_{\text{deg}} \cdot \dfrac{\pi}{180°}$

Bogemass $\to$ Gradmass: $\varphi_{\text{deg}} = \varphi_{\text{rad}} \cdot \dfrac{360°}{2\pi} = \varphi_{\text{rad}} \cdot \dfrac{180°}{\pi}$

Gradmass	0°	1°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Bogenmass	0	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Obwohl das Bogenmass keine eigentliche Einheit besitzt – sie entspricht der Einheit des zugrunde liegende Koordinatensystems – findet man manchmal die Schreibweise φ *rad*.

Taschenrechner

Wenn wir später die Winkelfunktionen (Sinus, Cosinus, Tangens) kennen lernen werden, wird es nötig sein, dass wir dem Taschenrechner mitteilen, in welchem System er die eingegebenen Zahl zu interpretieren hat:

- Falls Winkel im Gradmass gegeben sind oder im Gradmass ausgegeben werden sollen, stellt man den Rechner auf `Degree` (Deg) ein.
- Falls Winkel im Bogenmass gegeben sind oder im Bogenmass ausgegeben werden sollen, stellt man den Rechner auf `Radian` (Rad) ein.

2 Die Definition der Winkelfunktionen

Motivation

Bisher konnten wir mit Hilfe geometrischer Sätze in speziellen Figuren ...

- aus gegebenen Seitenlängen weitere Seitenlängen berechnen (Höhensatz, Kathetensätze, Satz von Pythagoras),
- aus gegebenen Winkeln die Grössen weiterer Winkel bestimmen (Summenformeln für Winkel in n-Ecken, Zentriwinkel-Periphieriewinkelsatz, Sehnen-Tangentenwinkelsatz).

Jedoch kennen wir noch keine Zusammenhänge zwischen Seitenlängen und Winkeln.

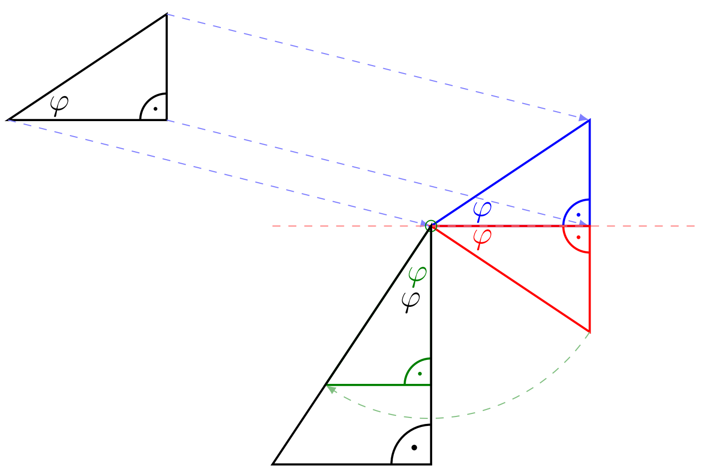
Ähnlichkeitssätze

- Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in zwei (und somit in drei) Winkeln übereinstimmen. (ww)
- Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in allen Verhältnissen entsprechender Seiten übereinstimmen. (sss)
- Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in einem Winkel und im Verhältnis der anliegenden Seiten übereinstimmen. (sws)
- Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und im Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen. (SsW)

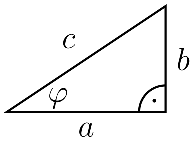
Dreiecke mit zwei identischen Winkeln

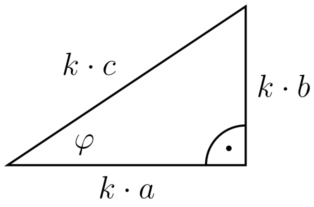
Wenn zwei rechtwinkligen Dreiecke in einem weiteren Winkel φ übereinstimmen, so unterscheiden sie sich aufgrund der Ähnlichkeitssätze bloss um eine Ähnlichkeitsabbildung. Das heisst, dass eines der Dreieck sich durch eine Translation, eine Spiegelung, eine Rotation und eine zentrische Streckung in das andere Dreieck überführen lässt.

Beispiel 2.1



Also unterscheiden sich in ähnlichen Dreiecken die Längen entsprechender Seiten um einem gemeinsamen Streckungsfaktor k.



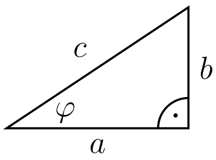


In einem Dreieck ABC ist das Verhältnis zweier Seitenlängen gleich gross wie das entsprechende Verhältnis in einem zu ABC ähnlichen Dreieck.

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b} \quad \text{und} \quad \frac{b}{c} = \frac{k \cdot b}{k \cdot c} \quad \text{und} \quad \frac{c}{a} = \frac{k \cdot c}{k \cdot a} \quad \text{usw.}$$

Begriffe

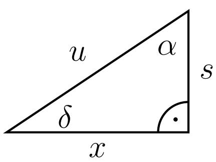
In einem rechtwinkligen Dreieck, mit dem Winkel φ werden die Seiten wie folgt benannt:



- a ist die *Ankathete* von φ.
- b ist die *Gegenkathete* von φ.
- c ist die *Hypothenuse*.

Die Bezeichnung einer Kathete hängt von ihrer relativen Lage zum gegebenen Winkel ab und nicht von der willkürlichen Beschriftung.

Beispiel 2.1



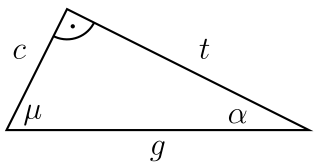
(a) Gegenkathete von α? x

(b) Ankathete von δ? x

(c) Hypotenuse? u

(d) Gegenkathete von δ? s

Beispiel 2.2

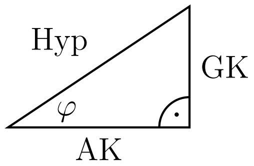


(a) Was ist t? Ankathete von α und Gegenkathete von μ

(b) Was ist g? Hypotenuse

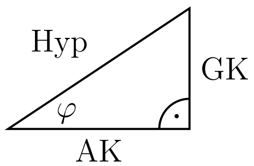
(c) Was ist c? Ankathete von μ und Gegenkathete von α

Die Winkelfunktionen



Die Seitenvehältnisse zum Winkel φ werden wie folgt genannt:

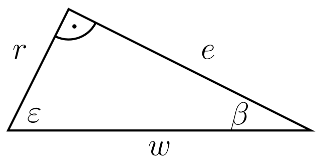
- $\sin(\varphi) = \dfrac{\text{GK}}{\text{Hyp}}$ (Sinus von φ)
- $\cos(\varphi) = \dfrac{\text{AK}}{\text{Hyp}}$ (Cosinus von φ)
- $\tan(\varphi) = \dfrac{\text{GK}}{\text{AK}}$ (Tangens von φ)



Die Kehrwerte der Winkelfunktionen sind heute aufgrund der Taschenrechner weniger gebräuchlich:

- $\sec(\varphi) = \dfrac{\text{Hyp}}{\text{GK}}$ (Sekans von φ)
- $\csc(\varphi) = \dfrac{\text{Hyp}}{\text{AK}}$ (Cosekans von φ)
- $\cot(\varphi) = \dfrac{\text{AK}}{\text{GK}}$ (Cotangens von φ)

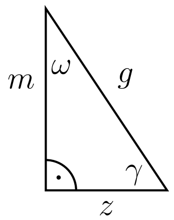
Beispiel 2.3



(a) $\sin(\varepsilon) = ?$ $\quad \frac{\text{GK}}{\text{Hyp}} = \frac{e}{w}$

(b) $\tan(\beta) = ?$ $\quad \frac{\text{GK}}{\text{AK}} = \frac{r}{w}$

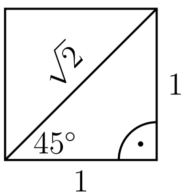
Beispiel 2.4



(a) $\tan(\omega) = ?$ $\quad \frac{\text{GK}}{\text{AK}} = \frac{z}{m}$

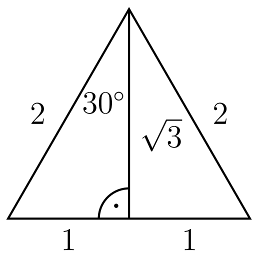
(b) $\cos(\gamma) = ?$ $\quad \frac{\text{GK}}{\text{Hyp}} = \frac{z}{g}$

Die Werte der Winkelfunktionen für $\varphi = 45°$



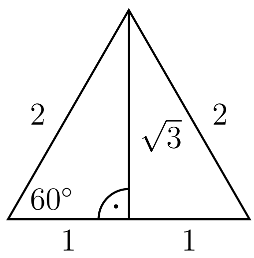
- $\sin(45°) = \frac{\text{GK}}{\text{Hyp}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos(45°) = \frac{\text{AK}}{\text{Hyp}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\tan(45°) = \frac{\text{GK}}{\text{AK}} = \frac{1}{1} = 1$

Die Werte der Winkelfunktionen für $\varphi = 30°$



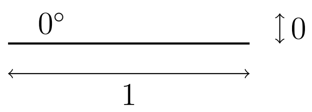
- $\sin(30°) = \frac{\text{GK}}{\text{Hyp}} = \frac{1}{2}$
- $\cos(30°) = \frac{\text{AK}}{\text{Hyp}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan(30°) = \frac{\text{GK}}{\text{AK}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Die Werte der Winkelfunktionen für $\varphi = 60°$



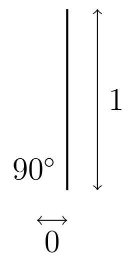
- $\sin(60°) = \frac{\text{GK}}{\text{Hyp}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos(60°) = \frac{\text{AK}}{\text{Hyp}} = \frac{1}{2}$
- $\tan(60°) = \frac{\text{GK}}{\text{AK}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

Die Werte der Winkelfunktionen für $\varphi = 0°$



- $\sin(0°) = \frac{\text{GK}}{\text{Hyp}} = \frac{0}{1} = 0$
- $\cos(0°) = \frac{\text{AK}}{\text{Hyp}} = \frac{1}{1} = 1$
- $\tan(0°) = \frac{\text{GK}}{\text{AK}} = \frac{0}{1} = 0$

Die Werte der Winkelfunktionen für $\varphi = 90°$



- $\sin(90°) = \dfrac{\text{GK}}{\text{Hyp}} = \dfrac{1}{1} = 1$
- $\cos(90°) = \dfrac{\text{AK}}{\text{Hyp}} = \dfrac{0}{1} = 0$
- $\tan(90°) = \dfrac{\text{GK}}{\text{AK}} = \dfrac{1}{0}$ nicht definiert

Zusammenfassung

φ	$\sin(\varphi)$	$\cos(\varphi)$	$\tan(\varphi)$
$0°$	0	1	0
$30°$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$45°$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$60°$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$90°$	1	0	—

Merkhilfe

φ	$\sin(\varphi)$	$\cos(\varphi)$	$\tan(\varphi)$
$0°$	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{0}/3$
$30°$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$45°$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{9}/3$
$60°$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{27}/3$
$90°$	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{0}/2$	—

Die Werte der übrigen Winkel

Es gibt noch weitere Winkel,für die sich die Werte der Winkelfunktionen mit Hilfe zusätzlicher Beziehungen exakt berechnen lassen.

Die Ausdrücke dafür werden aber immer komplizierter.

Beispiel: $\cos(15°) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Im Allgemeinen es jedoch nicht möglich, für jeden Winkel φ einen exakten Ausdruck der obigen Form zu finden. Stattessen verwendet man Näherungswerte, den man von einem Taschenrechner oder aus Tabellen erhält.

TI-84+

Mit den Tasten $\boxed{\texttt{sin}}$, $\boxed{\texttt{cos}}$ und $\boxed{\texttt{tan}}$ wird aus dem eingegebenen Winkel φ das zugehörige Seitenverhältnis berechnet.

Vorsicht: In der Status-Zeile steht, wie der Taschenrechner eingegebenen Winkel interpretiert (Degree oder Radian). Falls nötig, muss man diese Einstellung vor der Berechnung im Mode-Menü ändern.

Mit den Tastenkombinationen $\boxed{\texttt{2nd}}$ `[sin⁻¹]`, $\boxed{\texttt{2nd}}$ `[cos⁻¹]` und $\boxed{\texttt{2nd}}$ `[tan⁻¹]` wird aus dem jeweiligen Seitenverhältnis der entsprechende Winkel berechnet.

Vorsicht: In der Status-Zeile steht, wie die Winkel-Ausgabe zu interpretieren ist (Degree oder Radian). Falls nötig, muss man diese Einstellung vor der Berechnung im Mode-Menü ändern.

Die Winkelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen

$$\varphi \quad \underset{\arccos(x)=\varphi}{\overset{\cos(\varphi)=x}{\rightleftarrows}} \quad x = \frac{\text{AK}}{\text{Hyp}}$$

$$\varphi \quad \underset{\arcsin(y)=\varphi}{\overset{\sin(\varphi)=y}{\rightleftarrows}} \quad y = \frac{\text{GK}}{\text{Hyp}}$$

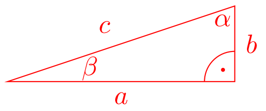
$$\varphi \quad \underset{\arctan(z)=\varphi}{\overset{\tan(\varphi)=z}{\rightleftarrows}} \quad z = \frac{\text{GK}}{\text{AK}}$$

3 Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

Beispiel 3.1

Gegeben: $\alpha = 38°$, $\gamma = 90°$, $c = 7\,\text{cm}$

Gesucht: β, a, b



$\beta = 90° - \alpha = 52°$

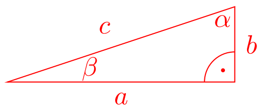
$$\frac{b}{c} = \cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad b = c \cdot \cos\alpha = 7 \cdot \cos(38°) \approx 5.516\,\text{cm}$$

$$\frac{a}{c} = \sin(\alpha) \quad \Rightarrow \quad a = c \cdot \sin(\alpha) = 7 \cdot \sin(38°) \approx 4.310\,\text{cm}$$

Beispiel 3.2

Gegeben: $\gamma = 90°$, $b = 5\text{cm}$, $c = 8\,\text{cm}$

Gesucht: a, α, β



$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{64 - 25} = \sqrt{39} \approx 6.245\,\text{cm}$$

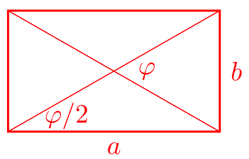
$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{5}{8}\right) \approx 51.318°$$

$$\sin(\beta) = \frac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad \beta = \arcsin\left(\frac{5}{8}\right) \approx 38.682° \;\; (\beta = 90° - \alpha)$$

Beispiel 3.3

Gegeben: Rechteck mit $a = 13\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$

Gesucht: der kleinere Schnittwinkel der beiden Diagonalen



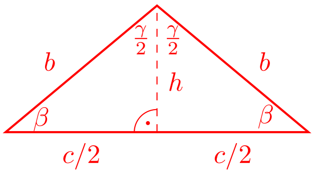
$$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{b}{a}$$

$$\frac{\varphi}{2} = \arctan\left(\frac{6}{13}\right) \quad \Rightarrow \quad \varphi = 2\arctan\left(\frac{6}{13}\right) \approx 49.550°$$

Beispiel 3.4

Gegeben: gleichschenkliges Dreieck mit $a = b$, $c = 10\,\text{cm}$ und $\gamma = 40°$

Gesucht: Flächeninhalt A



$$\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{c/2}{h} = \frac{c}{2h} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{c}{2\tan(\gamma/2)}$$

$$A = \frac{c}{2} \cdot h = \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2\tan(\gamma/2)} = \frac{25}{\tan(20°)} \approx 68.687\,\text{cm}^2$$

Beispiel 3.5

Ein Bahnstrecke hat auf einem Streckenabschnitt eine mittlere Steigung von 15‰. Berechnen den Steigungswinkel in Grad.

$$\tan(\varphi) = \frac{\text{Vertikaldistanz}}{\text{Horizontaldistanz}} = \frac{15}{1000}$$

$$\varphi = \arctan(0.015) \approx 0.859°$$

Beispiel 3.6

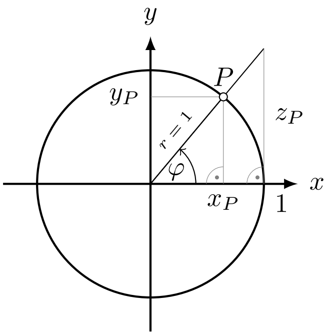
Welche Steigung hat die Gerade mit der Gleichung $g\colon y = \frac{2}{3}x + 1$?

$$\tan(\varphi) = \frac{\text{Vertikaldistanz}}{\text{Horizontaldistanz}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{3}$$

$$\varphi = \arctan(2/3) \approx 33.69°$$

4 Werte der Winkelfunktionen für beliebige Winkel

Die Winkelfunktionen am Einheitskreis



$\varphi \rightarrow P \rightarrow (x_P, y_P)$

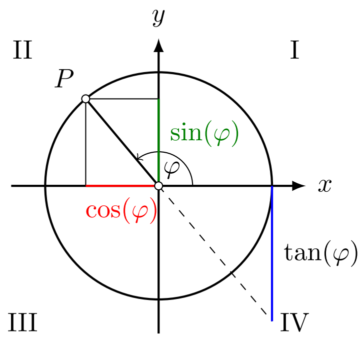
Drehung im Gegenurzeigersinn: $\varphi > 0$

Drehung im Uhrzeigersinn: $\varphi < 0$

$\cos\varphi = \dfrac{\text{AK}}{\text{Hyp}} = \dfrac{x_P}{1} = x_P \qquad \sin\varphi = \dfrac{\text{GK}}{\text{Hyp}} = \dfrac{y_P}{1} = y_P$

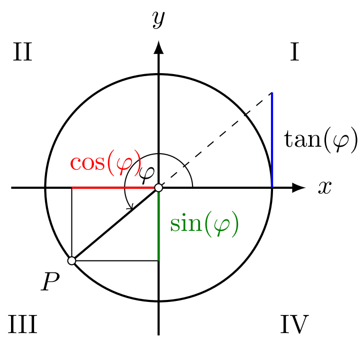
$\tan\varphi = \dfrac{\text{GK}}{\text{AK}} = \dfrac{y_P}{x_P} \overset{(*)}{=} \dfrac{z_P}{1} = z_P \qquad (*)$ 1. Strahlensatz

Winkelfunktionen im II. Quadranten



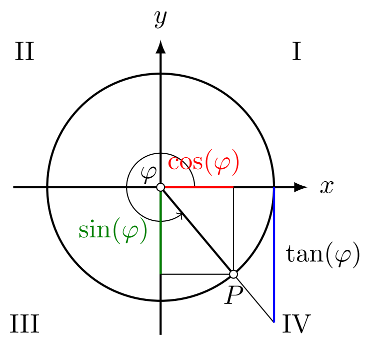
Für $90° < \varphi < 180°$ gilt: $\sin(\varphi) > 0 \quad \cos(\varphi) < 0 \quad \tan(\varphi) < 0$

Winkelfunktionen im III. Quadranten



Für $90° < \varphi < 180°$ gilt: $\sin(\varphi) < 0 \quad \cos(\varphi) < 0 \quad \tan(\varphi) > 0$

Winkelfunktionen im IV. Quadranten



Für $90° < \varphi < 180°$ gilt: $\sin(\varphi) < 0$ $\cos(\varphi) > 0$ $\tan(\varphi) < 0$

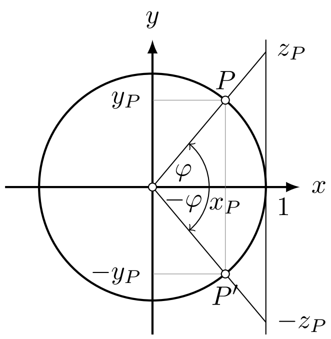
Zurückführen auf den Bereich $0° \leq \varphi < 360°$

$\sin(\varphi) = \sin(\varphi + k \cdot 360°)$ für $k \in \mathbb{Z}$

$\cos(\varphi) = \cos(\varphi + k \cdot 360°)$ für $k \in \mathbb{Z}$

$\tan(\varphi) = \tan(\varphi + k \cdot 180°)$ für $k \in \mathbb{Z}$

Übergang zum negativen Winkel



$\cos(-\varphi) = x_P = \cos(\varphi)$ $\sin(-\varphi) = -y_P = -\sin(\varphi)$

$\tan(-\varphi) = -\tan(\varphi)$

Beispiel 4.1

In welchem Quadranten befindet sich der Winkel φ wenn ...

(a) $\sin(\varphi) > 0$ und $\cos(\varphi) < 0$,

im II. Quadranten

(b) $\tan(\varphi) < 0$ und $\cos(\varphi) > 0$?

im IV. Quadranten

Beispiel 4.2

Löse ohne Taschenrechner: Welche der Winkelfunktionswerte sind identisch?

$\sin(45°)$, $\cos(50°)$, $\tan(60°)$, $\cos(140°)$, $\sin(20°)$, $\cos(-50°)$, $\tan(-60°)$, $\cos(45°)$, $\sin(380°)$, $\tan(240°)$, $\cos(220°)$

$\sin(45°) = \cos(45°)$

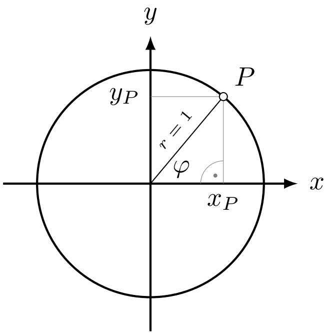
$\cos(50°) = \cos(-50°)$

$\tan(60°) = \tan(240°)$

$\cos(140°) = \cos(220°)$

$\sin(20°) = \sin(380°)$

Grundbeziehungen zwischen den Winkelfunktionen



$$\tan(\varphi) = \frac{y_P}{x_P} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}}$$

Pythagoras: $y_P^2 + x_P^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1}$

Beispiel 4.3

Vereinfache die trigonometrischen Ausdrücke:

(a) $\dfrac{\sin(-\varphi)}{\cos(-\varphi)} = \dfrac{-\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = -\dfrac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = -\tan(\varphi)$

(b) $1 - \sin^2(\varphi) = \left[\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\right] - \sin^2(\varphi) = \cos^2(\varphi)$

Reduktionsformeln

$\sin(90° - \varphi) = \cos(\varphi)$	$\cos(90° - \varphi) = \sin(\varphi)$
$\sin(90° + \varphi) = \cos(\varphi)$	$\cos(90° + \varphi) = -\sin(\varphi)$
$\sin(180° - \varphi) = \sin(\varphi)$	$\cos(180° - \varphi) = -\cos(\varphi)$
$\sin(180° + \varphi) = -\sin(\varphi)$	$\cos(180° + \varphi) = -\cos(\varphi)$

Beispiel 4.4

Stelle $\sin(110°)$ in der Form $\sin(\varphi)$ dar, wobei $0° < \varphi < 90°$.

$\sin(110°) = \sin(180° - 70°) = \sin(70°)$

Beispiel 4.5

Stelle $\cos(230°)$ in der Form $-\cos(\varphi)$ dar, wobei $0° < \varphi < 90°$.

$\cos(230°) = \cos(180° + 50°) = -\cos(50°)$

Beispiel 4.6

Leite die Reduktionsformel für den Ausdruck $\tan(90 + \varphi)$ her.

$$\begin{aligned}\tan(90° + \varphi) &= \frac{\sin(90° + \varphi)}{\cos(90° + \varphi)} = \frac{\cos(\varphi)}{-\sin(\varphi)} \\ &= -\frac{1}{\sin(\varphi)/\cos(\varphi)} = -\frac{1}{\tan(\varphi)}\end{aligned}$$

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Beispiel 4.7

Leite mit Hilfe der Additionstheoreme eine Formel für $\sin(2\alpha)$ her und vereinfache den Ausdruck so weit wie möglich.

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= \sin(\alpha + \alpha) = \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\end{aligned}$$

Beispiel 4.8

Berechne mit Hilfe der Additionstheoreme den exakten Wert von $\tan(75°)$ und vereinfache das Ergebnis.

$$\tan(75°) = \tan(45° + 30°) = \frac{\tan(45°) + \tan(30°)}{1 - \tan(45°)\tan(30°)}$$

exakte Werte: $\tan(45°) = 1$

$\tan(30°) = \sqrt{3}/3$

$$\tan(75^\circ) = \frac{1+\sqrt{3}/3}{1-\sqrt{3}/3} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

Summen

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Produktformeln

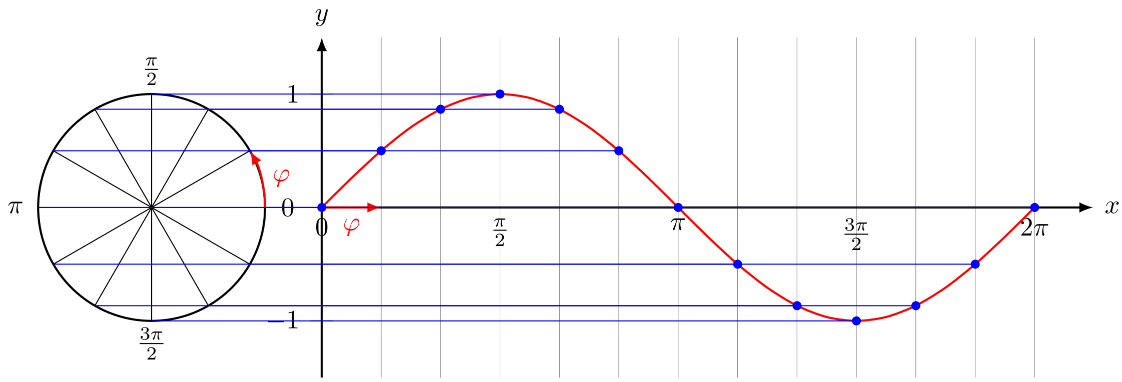
$$\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

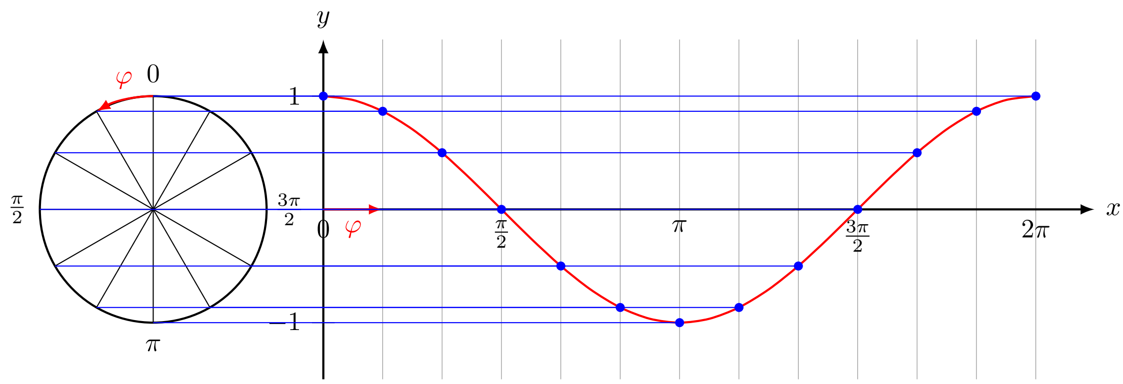
5 Die Graphen der trigonometrischen Funktionen

Der Graph der Sinusfunktion



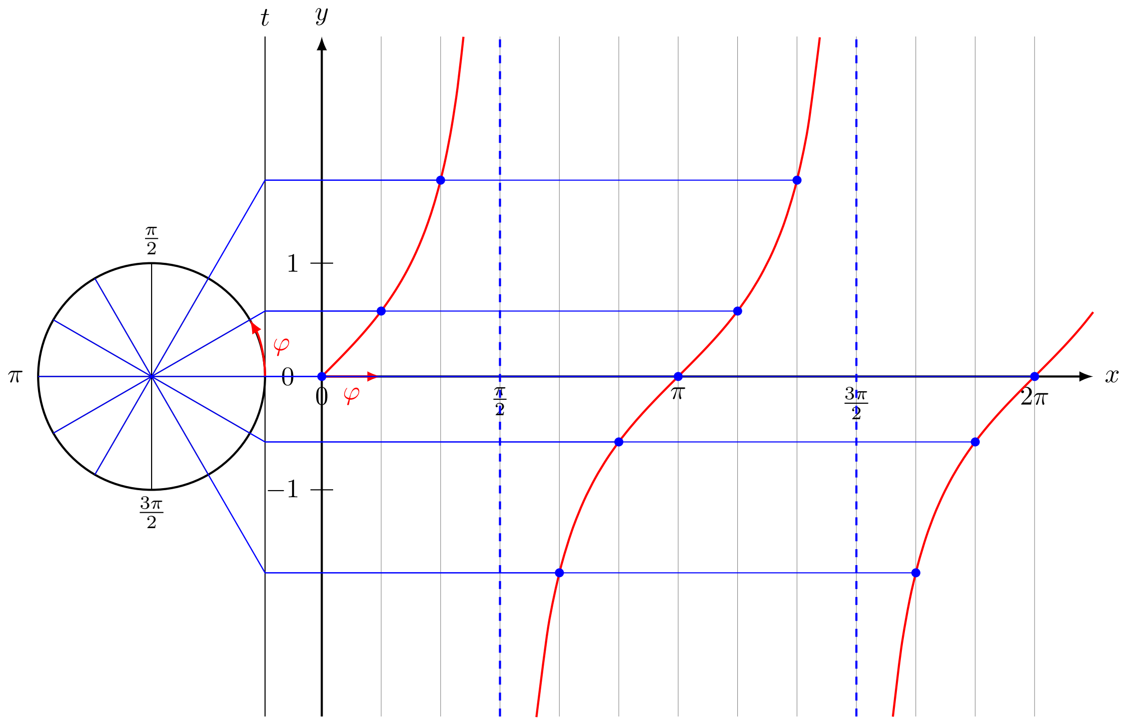
- Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$
- Wertebereich: $W = [-1, 1]$
- Nullstellen: $x_k = k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$
- Symmetrie: punktsymmetrisch zu $(0, 0)$
- Periodizität: 2π-periodisch: $f(x + k \cdot 2\pi) = f(x)$ für $k \in \mathbb{Z}$

Der Graph der Cosinusfunktion



- Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$
- Wertebereich: $W = [-1, 1]$
- Nullstellen: $x_k = (2k + 1)/2 \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$
- Symmetrie: achsensymmetrisch zu $x = 0$
- Periodizität: 2π-periodisch: $f(x + k \cdot 2\pi) = f(x)$ für $k \in \mathbb{Z}$

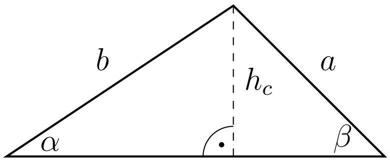
Der Graph der Tangensfunktion



- Definitionsbereich: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2k+1}{2} \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Wertebereich: $W = \mathbb{R}$
- Nullstellen: $x_k = k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$
- Symmetrie: punktsymmetrisch zu $(0, 0)$
- Periodizität: π-periodisch: $f(x + k \cdot \pi) = f(x)$ für $k \in \mathbb{Z}$
- Asymptoten: $x_k = \frac{2k+1}{2} \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$

6 Der Sinus- und Cosinussatz

Der Sinussatz



$\sin\alpha = \dfrac{h_c}{b} \quad \Rightarrow \quad h_c = b\cdot\sin\alpha \quad (1)$

$\sin\beta = \dfrac{h_c}{a} \quad \Rightarrow \quad h_c = a\cdot\sin\beta \quad (2)$

Setzt man (1) und (2) gleich, so erhält man:

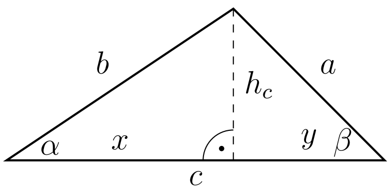
$b\cdot\sin\alpha = a\cdot\sin\beta \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{a}{b} \qquad (Z)$

(Z) bedeutet, dass die Formel zyklisch vertauschbar ist, d. h. sie bleibt auch bei systematischer „Verschiebung" der Variablen ($a \to b \to c \to a$ und $\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$) richtig:

$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \dfrac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{a}$

Sinussatz: In jedem Dreieck verhalten sich zwei Seiten wie die Sinuswerte der gegenüberliegenden Winkel.

Der Projektionssatz



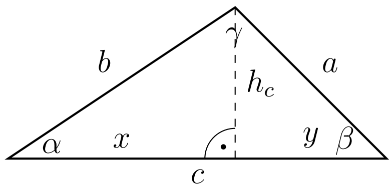
$\dfrac{x}{b} = \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad x = b\cdot\cos\alpha \quad$ (x ist Projektion von b auf c)

$\dfrac{y}{a} = \cos\beta \quad \Rightarrow \quad y = a\cdot\cos\beta \quad$ (y ist Projektion von a auf c)

mit $c = x + y$ folgt daraus der *Projektionsssatz*:

$c = b\cdot\cos\alpha + a\cdot\cos\beta \qquad (Z)$

Der Cosinussatz



$$a^2 = h_c^2 + y^2 = h_c^2 + (c-x)^2 = (b\,\sin\alpha)^2 + (c - b\,\cos\alpha)^2$$
$$= b^2\sin^2\alpha + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha$$
$$= b^2(\underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1}) + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha$$

Cosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha \qquad (Z)$

Beispiel 6.1 (SSS)

Gegeben: $\triangle ABC$ mit $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$ Gesucht: α, β, γ

Cosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{3}{4} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \arccos\frac{3}{4} \approx 41.41°$$

$$\cos\beta = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{9}{16} \quad\Rightarrow\quad \beta = \arccos\frac{9}{16} \approx 55.77°$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{1}{8} \quad\Rightarrow\quad \gamma = \arccos\frac{1}{8} \approx 82.82°$$

Kontrolle: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Beispiel 6.2 (SWS)

Gegeben: $\triangle ABC$ mit $a = 6$, $b = 4$, $\gamma = 70°$ Gesucht: c, α, β

Cosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$$c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma} \approx 5.97 \to \mathtt{C}$$

Sinussatz: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \dfrac{a}{c} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \arcsin\left(\dfrac{a\cdot\sin\gamma}{c}\right) \approx 70.94°$

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c} \quad\Rightarrow\quad \beta = \arcsin\left(\frac{b\cdot\sin\gamma}{c}\right) \approx 39.06°$$

Kontrolle: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Beispiel 6.3 (WSW)

Gegeben: $\triangle ABC$ mit $c = 7$, $\alpha = 23°$, $\beta = 34°$ Gesucht: a, b, γ

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 123°$

Sinussatz: $\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \quad \Rightarrow \quad a = c \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \approx 3.26$

$$b = a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \approx 4.67$$

Beispiel 6.4 (SsW)

Gegeben: $\triangle ABC$ mit $b = 5$, $c = 4$, $\beta = 46°$ Gesucht: a, α, γ

Sinussatz: $\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{c}{b} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arcsin\left(\frac{c \cdot \sin\beta}{b}\right) \approx 35.13° \to \texttt{Z}$

$\alpha = 180° - \beta - \gamma \approx 98.87° \to \texttt{X}$

Sinussatz: $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} \approx 6.87$