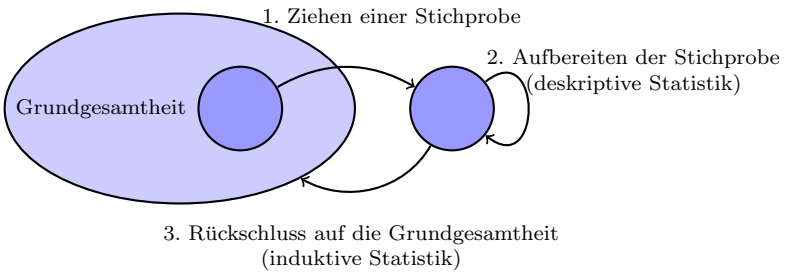
Deskriptive Statistik

Theorie

Version vom 28. August 2019

1 Überblick



1.1 Die Aufgaben der beschreibenden Statistik

In der deskriptiven (=beschreibenden) Statistik werden Untersuchungsergebnisse

- übersichtlich dargestellt,
- durch Kennzahlen charakterisiert und
- grafisch veranschaulicht.

1.2 Grundgesamtheit

Die *Grundgesamtheit* (oder *Population*) ist eine gedankliche Konstruktion, die alle Elemente eines Untersuchungsgegenstands umfasst.

Beispiele:

- Alle linkshändigen Schülerinnen
- Alle am 31.12.2014 in Stans wohnhaften Personen

1.3 Stichprobe

„Eine Stichprobe stellt eine Teilmenge aller Untersuchungsobjekte dar, die die untersuchungsrelevanten Eigenschaften der Grundgesamtheit möglichst genau abbilden soll.“ (Bortz, 2010)

Warum untersucht man nicht gleich die Grundgesamtheit?

- Grundgesamtheiten sind für eine Vollerhebung oft zu gross.
- Manche Untersuchungen zerstören die Merkmalsträger (z. B. Reissfestigkeit von Bergseilen)

1.4 Arten von Stichproben

- *Einfache Zufallsstichprobe:* Aus der Grundgesamtheit werden zufällig n Objekte (ohne Zurücklegen) gezogen.
- *Klumpenstichprobe:* In zufällig ausgewählten „Klumpen“ (Schulen, Gemeinden, Kliniken) werden *alle* Objekte untersucht.
- *Geschichtete Zufallsstichprobe:* Falls bekannt ist, welche Grösse(n) die zu untersuchenden Objekte beeinflussen, ist eine Zerlegung der Grundgesamtheit in entsprechende Kategorien (Schichten) sinnvoll. *Beispiel:* Möchte man die Konsumgewohnheiten in der Schweiz untersuchen, so kann z. B. das Einkommen als Schichtungsmerkmal verwendet werden.
- *Ad-hoc-Stichprobe:* Familie, Schulklasse, Freundeskreis. Bequem aber für eine Verallgemeinerung in der Regel ungeeignet.

1.5 Merkmale

Merkmale beschreiben Eigenschaften einer Population und damit auch einer Stichprobe.

Ein Merkmal besteht aus einem *Merkmalsträger* und einer *Merkmalsausprägung* (*Faktor*).

Beispiel: In der Schweiz erwerbstätige Personen

Merkmalsträger:	Person (AHV-Nr. ...)
Merkmal:	Geschlecht
Merkmalsausprägung:	weiblich
Merkmal:	Jahreseinkommen
Merkmalsausprägung:	CHF 74 000

1.6 Messen

S. S. Stevens definiert „Messen“ wie folgt (1946):

> Measurement, in the broadest sense, is defined as the assignment of numerals to objects or events according to rule.

Gesetzlich ist „Messen“ ein *Vergleich* mit einer Skala (DIN 1319, Teil 1).

Fasst man also einen Messvorgang so auf, dass man einem Merkmalsträger eine Zahl zuordnet, so stellt sich die Frage, welche mathematischen Operationen auf der jeweiligen Skala möglich sind.

1.7 Skalenniveaus

Nominalskala

Die Skalenwerte haben keinen Zusammenhang mit den Objekteigenschaften. Sie dienen nur der Kategorisierung der Objekte. *Beispiele:*

- Geschlecht
- Haarfarbe
- Nationalität
- Konfession

Die einzigen Operationen auf dieser Skala sind der Test auf Gleichheit ($=$) und auf Ungleichheit ($\neq$).

Aber: Man kann nicht sagen, dass die Haarfarbe schwarz grösser sei als die Haarfarbe blond.

Ordinalskala

Die Skalenwerte erlauben es, eine Ordnungsbeziehung zwischen den Objekten herzustellen. *Beispiele:*

- Zufriedenheit
- Rangfolge bei Schönheitswettbewerben
- Güteklassen von Lebensmitteln
- Windstärke (Beaufort-Skala)
- Zeugnisnoten

Bei der Ordinalskala kommen zu den Operationen der Nominalskala die Beziehungen *kleiner als* ($<$) bzw. *grösser als* ($>$) hinzu.

Aber: Man kann nicht sagen (messen), wie viel *schöner* die Vize-Miss sein müsste, um Miss zu werden.

Intervallskala

Die Intervallskala erlaubt es, die Differenzen zwischen den Skalenwerten der Objekte zu vergleichen. *Beispiele:*

- Temperatur (in Grad Celsius)
- Jahreszahlen
- Zeitpunkte
- IQ

Bei der Intervallskala kommen zu den Operationen der Ordinalskala die Differenzen- und die Summenbildung hinzu.

Aber: Wenn es heute 10 °C ist und morgen 20 °C, so ist es morgen zwar 10 °C wärmer, aber nicht doppelt so warm (wird deutlich, wenn man in Fahrenheit umrechnet).

Verhältnisskala

Die Verhältnisskala erlaubt es, Verhältnisse zwischen den Skalenwerten der Objekte zu vergleichen. *Beispiele:*

- Länge
- Punktzahlen
- Alter
- Körpergrösse

Bei der Verhältnisskala kommen zu den Operationen der Intervallskala die Quotienten- und die Produktbildung hinzu.

2 Das Summenzeichen

$$\sum_{k=1}^{4}(2k-1) = \underbrace{(2\cdot 1-1)}_{k=1} + \underbrace{(2\cdot 2-1)}_{k=2} + \underbrace{(2\cdot 3-1)}_{k=3} + \underbrace{(2\cdot 4-1)}_{k=4}$$

$$= 1+3+5+7 = 16$$

$\sum$	Summenzeichen („Sigma“ = grosses griechisches S)
k	Summationsindex (manchmal auch i, j, oder l)
$k=1$	Der Summationsindex k startet hier bei 1 …
	… und läuft in Einerschritten bis zum …
4	Summationsende $k=4$
$(2k-1)$	allgemeiner Summand

Sprich: „Die Summe über alle $(2k-1)$, wobei k von 1 bis 4 läuft.“

3 Statistische Kennwerte

Übersicht

Liegen von einem Merkmal mehrere quantitative Merkmalsausprägungen vor, so lassen sich diese Daten im Hinblick auf die folgenden zwei Gesichtspunkte statistisch charakterisieren:

- Wo liegt die Mitte der Daten? (*zentrale Tendenz*)
- Wie stark streuen die Daten? (*Variabilität*, *Streuung*)

3.1 Masse der zentralen Tendenz

In einer Umfrage wurden an einem Werktag zu unterschiedlichen Zeitpunkten 100 zufällig ausgewählte Bahnreisende nach ihrem Alter befragt.

51	9	44	76	38	43	13	41	82	84
74	2	31	46	45	38	80	58	27	65
7	25	46	18	29	20	17	53	6	56
17	21	59	20	43	63	45	43	17	11
21	3	27	59	58	27	17	62	51	53
47	10	17	37	18	14	35	28	14	39
10	59	29	11	20	13	32	1	17	55
16	65	64	15	2	28	47	27	50	18
80	61	17	66	35	46	32	53	25	51
81	76	41	16	30	27	33	19	43	62

Der Mittelwert (arithmetisches Mittel)

Der Mittelwert ist das gebräuchlichste Mass, um die zentrale Tendenz der Verteilung eines intervall- oder verhältnisskalierten Merkmals zu beschreiben.

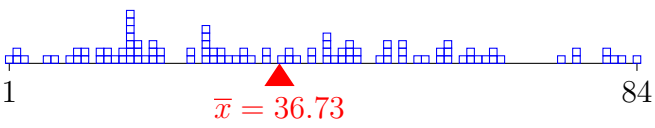
Mittelwert einer Stichprobe $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Mittelwert einer Grundgesamtheit $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \cdots = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

In der Beispielstichprobe der Bahnreisenden gilt: $\overline{x} = 36.73$



Die Summe der Abweichungen vom Mittelwert ergibt immer null:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) &= \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \overline{x} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot \overline{x} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \\ &= 0\end{aligned}$$

Der Median (Zentralwert)

Sind

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

die Werte einer Stichprobe oder einer Grundgesamtheit, so wird eine Zahl $\tilde{x}$, welche die *Ordnungsstatistik*, d. h. die Liste der sortierten Werte

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$$

in zwei gleich grosse Teile zerlegt, *Median* oder *Zentralwert* genannt.

Beispiel 3.1

Stichprobe:

$x_1 = 9,\ x_2 = 5,\ x_3 = 3,\ x_4 = 2,\ x_5 = 6$

Ordnungsstatistik:

$x_{(1)} = 2,\ x_{(2)} = 3,\ x_{(3)} = 5,\ x_{(4)} = 6,\ x_{(5)} = 9$

Median: $\tilde{x} = 5$

Beispiel 3.2

Stichprobe:

$x_1 = 9,\ x_2 = 5,\ x_3 = 3,\ x_4 = 2,\ x_5 = 6,\ x_6 = 2$

Ordnungsstatistik:

$x_{(1)} = 2,\ x_{(2)} = 2,\ x_{(3)} = 3,\ x_{(4)} = 5,\ x_{(5)} = 6,\ x_{(6)} = 9$

Median: $\tilde{x} = 4$

Bei geradem Stichprobenumfang ist der Median das arithmetische Mittel der beiden Werte in der „Mitte“ der Ordnungsstatistik.

Warum soll man den Median verwenden?

Der Median ist unempfindlicher (*robuster*) gegenüber extremen Werten (*Ausreissern*) als das arithmetische Mittel.

Stichprobe A: $x_{(1)} = 4$, $x_{(2)} = 5$, $x_{(3)} = 7$, $x_{(4)} = 8$

Stichprobe B: $x_{(1)} = 4$, $x_{(2)} = 5$, $x_{(3)} = 7$, $x_{(4)} = 80$

	Stichprobe A	Stichprobe B
$\overline{x}$	6	24
$\tilde{x}$	6	6

Warum soll man den Median verwenden? (Teil 2)

Der Median kann auch bei ordinalskalierten Merkmalswerten angewendet werden. Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} x_{(1)} = \text{nie} \\ x_{(2)} = \text{wenig} \\ x_{(3)} = \text{wenig} \\ x_{(4)} = \text{manchmal} \\ x_{(5)} = \text{oft} \\ x_{(6)} = \text{oft} \\ x_{(7)} = \text{oft} \\ x_{(8)} = \text{oft} \\ x_{(9)} = \text{immer} \\ x_{(10)} = \text{immer} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \tilde{x} = \text{oft}$$

Der Modalwert (Modus)

Der *Modalwert* oder *Modus* ist der am häufigsten auftretende Merkmalswert.

Er kann grundsätzlich für Merkmalswerte auf allen Skalen berechnet werden.

- $x_1 = \text{ja}$, $x_2 = \text{nein}$, $x_3 = \text{nein}$, $x_4 = \text{ja}$, $x_5 = \text{nein}$

  Modus: nein

- $x_1 = \text{ja}$, $x_2 = \text{nein}$, $x_3 = \text{nein}$, $x_4 = \text{ja}$, $x_5 = \text{ja}$

  Modus: ja

- $x_1 = 1.32$, $x_2 = 2.54$, $x_3 = 3.6$, $x_4 = 1.97$, $x_5 = 3.05$

  Modus: ? nicht definiert

Das geometrische Mittel

Für eine Familie haben sich die Krankenkassenprämien in den vergangenen vier Jahren wie folgt entwickelt.

Jahr	2011	2012	2013	2014
Anstieg	3%	4%	−5%	8%

(a) Um wie viel Prozent sind die Prämien in den letzten vier Jahren insgesamt gestiegen?

$1.03 \cdot 1.04 \cdot 0.95 \cdot 1.08 = 1.0990512 \quad \Rightarrow \quad +9.9\%$

(b) Berechne den durchschnittlichen prozentualen Anstieg pro Jahr.

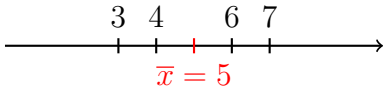
$\sqrt[4]{1.0990512} \approx 1.024 \quad \Rightarrow \quad +2.4\%$

3.2 Masse der Variabilität

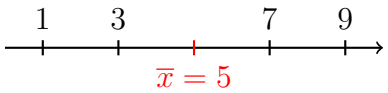
Das Konzept

Es ist möglich, dass zwei Grundgesamtheiten oder zwei Stichproben denselben Mittelwert haben; sich aber darin unterscheiden, wie stark die Daten um ihr Zentrum *streuen*.

Stichprobe A: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$, $x_4 = 7$



Stichprobe B: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 7$, $x_4 = 9$



Die Varianz einer Grundgesamtheit

Für eine Grundgesamtheit ist die *Varianz* σ^2 definiert als die mittlere quadratische Abweichung der Werte vom Mittelwert:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

Durch die Quadrate werden Abweichungen, die kleiner als 1 sind noch kleiner gemacht und Abweichungen, die grösser als 1 sind, verstärkt. (Das ist in vielen Situation so „gewollt“.)

Die Varianz einer Stichprobe

Für eine Stichprobe ist die *empirische Varianz* s^2 definiert als

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2$$

Die Multiplikation mit $1/(n-1)$ ist nötig, damit man mit der empirischen Varianz die unbekannte Varianz der Grundgesamtheit σ^2 korrekt schätzen kann. Mit dem Faktor $1/n$ würde man systematisch zu tief liegen.

(Eine Erklärung für diese sogenannte *Bessel-Korrektur* kann erst in der 6. Klasse gegeben werden.)

Die (empirische) Standardabweichung

In den Formeln für die Varianz treten die gegebenen Grössen im Quadrat auf. Um wieder mit den ursprünglichen Einheiten rechnen zu können, zieht man die Wurzel aus der (empirischen) Varianz und enthält so die *(empirische) Standardabweichung*.

- Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
- empirische Standardabweichung: $s = \sqrt{s^2}$

Beispiel

Berechne die empirische Varianz und Standardabweichung:

- Stichprobe A: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$, $x_4 = 7$
- Stichprobe B: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 7$, $x_4 = 9$

$\overline{x}_A = 5$ und $\overline{x}_B = 5$

$$s_A^2 = \frac{(3-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (7-5)^2}{3} = \frac{10}{3}$$

$$s_B^2 = \frac{(1-5)^2 + (3-5)^2 + (7-5)^2 + (9-5)^2}{3} = \frac{40}{3}$$

$$s_A = \sqrt{\frac{10}{3}} \text{ und } s_B = \sqrt{\frac{40}{3}} = 2\sqrt{\frac{10}{3}} = 2s_A$$

Die Variationsbreite (Spannweite oder Range)

Hierbei handelt es sich um die leicht zu berechnende Grösse.

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

Quartile

- Das *erste Quartil* bezeichnet einen Wert $x_{0.25}$ mit der Eigenschaft, dass ein Viertel der Daten kleiner als $x_{0.25}$ sind. Unsere Berechnungsvorschrift* für das erste Quartil lautet: *Bestimme den Median der Werte unterhalb vom Median.*
- Das *dritte Quartil* bezeichnet einen Wert $x_{0.75}$ mit der Eigenschaft, dass drei Viertel der Daten kleiner als $x_{0.75}$ sind. Die Berechnungsvorschrift* für das dritte Quartil lautet: *Bestimme den Median der Werte oberhalb vom Median.*
- Das zweite Quartil $x_{0.5}$ entspricht dem Median $\tilde{x}$.

* Aufgrund der Definition sind die Quartile im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Die oben beschriebene Berechnungsmethode wird auch von den TI-84-Taschenrechnern angewendet.

Interquartilabstand

Der Interquartilabstand (*interquartile Range*, IQR) ist die Differenz zwischen dem dritten und dem ersten Quartil:

$$\text{IQR} = Q_{75\%} - Q_{25\%}$$

Im Gegensatz zur Standardabweichung und der Spannweite ist der Interquartilabstand ein Variabilitätsmass, das robust gegenüber Ausreissern ist.

Beispiel

Wie gross ist der IQR im letzten Beispiel?

$$\text{IQR} = Q_{75\%} - Q_{25\%} = 11 - 4.5 = 6.5$$

4 Graphische Darstellungen

4.1 Nominal- und ordinalskalierte Merkmale

Beispiel

In einer Umfrage unter 100 Schülern einer Schule wurde gefragt, welches „Transportmittel“ hauptsächlich für den Schulweg genutzt wird.

Im Mittelpunkt der Aufbereitung steht eine Tabelle mit den *absoluten* und den *relativen Häufigkeiten* der Merkmalsausprägungen.

Schulweg	**absolute Häufigkeit**	**relative Häufigkeit**
zu Fuss	6	0.06 (6%)
mit Velo	32	0.32 (32%)
mit Bus	28	0.28 (28%)
mit Zug	19	0.19 (19%)
mit Mofa/Motorrad	14	0.14 (14%)
mit Auto	1	0.01 (1%)
Summe	100	1.00 (100%)

Daraus ergibt sich das *einfache Stabdiagramm* in Abbildung 1.

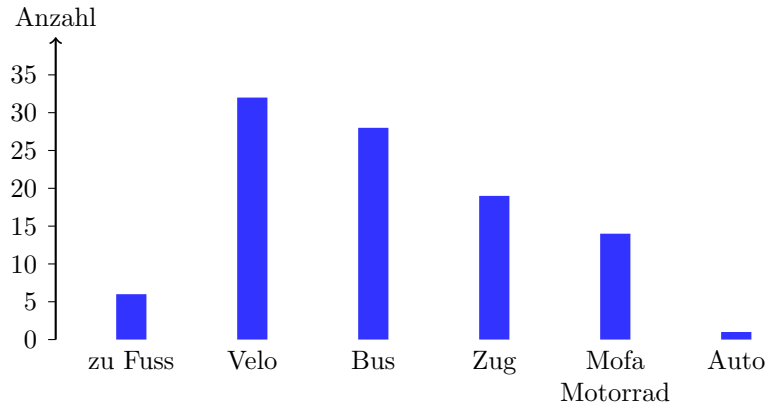


Abbildung 1: Primäres Transportmittel auf dem Schulweg

Die horizontale Darstellungsweise (Balkendiagramm) ist bei wenig Kategorien oder bei langen Kategoriennamen platzsparender (Abbildung 2).

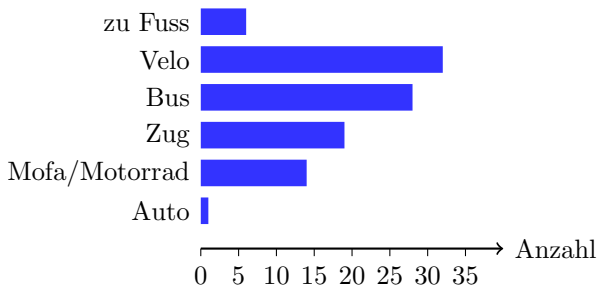


Abbildung 2: Primäres Transportmittel auf dem Schulweg

Wenn man ein Stabdiagramm nach Kategorien aufteilt, entsteht ein *gruppiertes Stabdiagramm* wie in Abbildung 3.

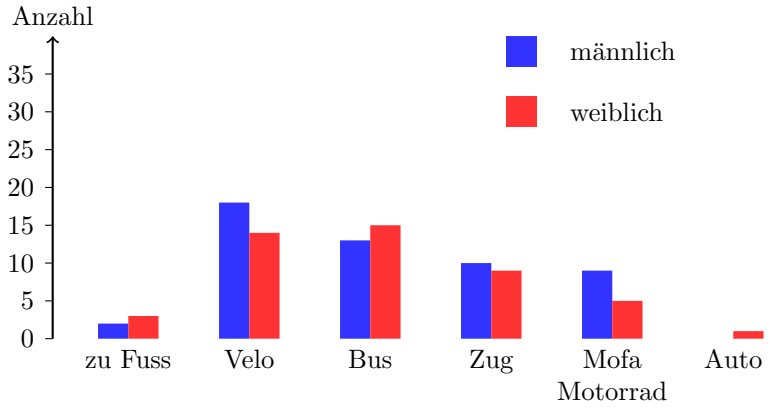


Abbildung 3: Primäres Transportmittel auf dem Schulweg (nach Geschlecht)

Kreisdiagramme wie in Abbildung 4 eignen sich nicht unbedingt für die Darstellung von Informationen, da wir Längenunterschiede besser erkennen können als Differenzen von Kreissektorflächen. Um Monotonie in der Wahl der Grafiken zu vermeiden, kann ein Kreisdiagramm gelegentlich sinnvoll sein.

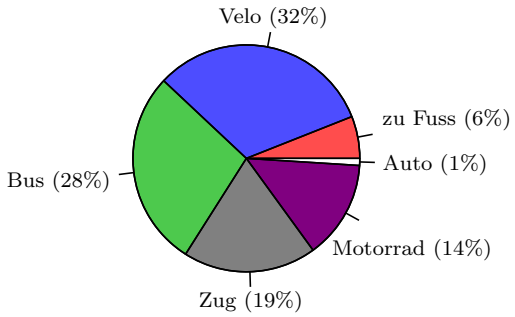
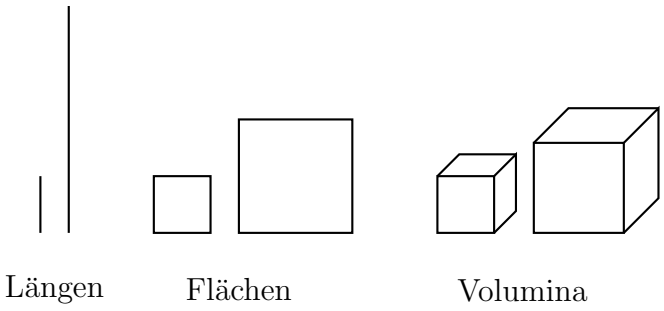


Abbildung 4: Primäres Transportmittel auf dem Schulweg

Finger weg von 3D-Darstellungen!

Das Verhältnis 1 : 4 in verschiedenen Dimensionen



4.2 Intervall- oder verhältnisskalierte Merkmale

Beispiel

Eine grosse Zahl metrisch skalierter Rohdaten ist intuitiv schlecht zu erfassen.

Anzahl Fehler im Diktat von zwei Klassen:

A: 4, 6, 21, 14, 0, 14, 7, 4, 15, 1, 13, 21, 17, 15, 21, 15

B: 2, 5, 20, 16, 20, 21, 21, 12, 2, 5, 4, 9, 10, 9, 24, 12, 19, 7

Ordnungsstatistik:

A: 0, 1, 4, 4, 6, 7, 13, 14, 14, 15, 15, 15, 17, 21, 21, 21

B: 2, 2, 4, 5, 5, 7, 9, 9, 10, 12, 12, 16, 19, 20, 20, 21, 21, 24

Um die Verteilungseigenschaften von metrisch skalierten Daten veranschaulichen zu können, werden sie in *Intervalle* eingeteilt.

Dazu einige Faustregeln:

- Alle Intervalle sollten die gleiche Breite haben.
- Werte, die auf eine Intervallgrenze fallen, werden in der Regel zum darunterliegenden Intervall gezählt.
- Maximal 20 Klassen

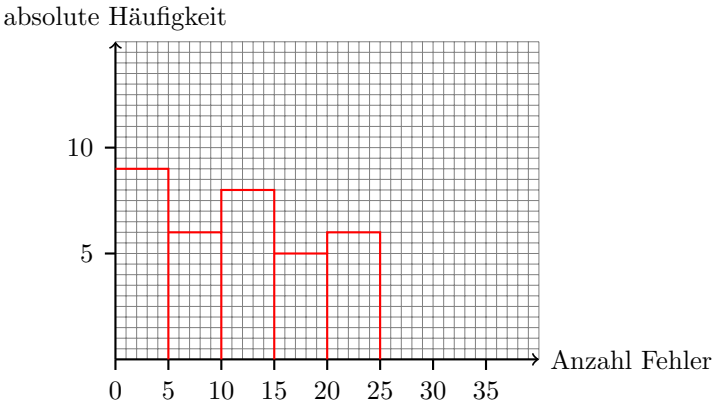
Tabellarische Darstellung

Die Häufigkeitsverteilung der Diktatfehler (gepoolt):

Intervall	**absolute Häufigkeit**	**relative Häufigkeit**	
$0 < x \leq 5$	9	0.265	(26.5%)
$5 < x \leq 10$	6	0.176	(17.6%)
$10 < x \leq 15$	8	0.235	(23.5%)
$15 < x \leq 20$	5	0.147	(14.7%)
$20 < x \leq 25$	6	0.176	(17.6%)
Summe	34	1.000	(100%)

Das Histogramm

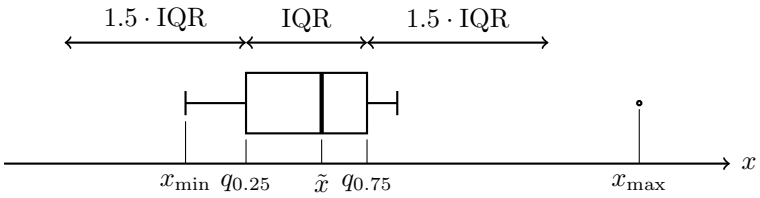
Im Gegensatz zum Stabdiagramm hat das Histogramm eine horizontale metrische Skala. Auf der vertikalen Achse können die absoluten oder die relativen Klassenhäufigkeiten eingezeichnet werden. Die Fläche der Balken entspricht der absoluten (relativen) Häufigkeit.



Median und Quartile

	$x_{\min}$	$x_{0.25}$	$\tilde{x}$	$x_{0.75}$	$x_{\max}$	IQR
Klasse A	0	5	14	16	21	11
Klasse B	2	5	11	20	24	15

Das Box-and-Whiskers Plot



Werte, die kleiner als $q_{0.25} - 1.5 \cdot \text{IQR}$ oder grösser als $q_{0.75} + 1.5 \cdot \text{IQR}$ sind, werden als *Ausreisser* bezeichnet.

Das Box-and-Whiskers Plot der Beispieldaten