

---

# Potenzen und Wurzeln

## Übungen

---

Version vom 15. November 2019

### Aufgabe 1

$$(a) \sqrt[3]{125} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = 5^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 5^1 = 5$$

$$(b) \sqrt[3]{1000} = (10^3)^{\frac{1}{3}} = 10^1 = 10$$

$$(c) \sqrt[4]{256} = (2^8)^{\frac{1}{4}} = 2^2 = 4$$

$$(d) \sqrt[8]{256} = (2^8)^{\frac{1}{8}} = 2^1 = 2$$

### Aufgabe 2

$$(a) \sqrt[3]{1\,000\,000} = (10^6)^{\frac{1}{3}} = 10^2 = 100$$

$$(b) \sqrt[2]{64} = 8$$

$$(c) \sqrt[10]{1024} = (2^{10})^{\frac{1}{10}} = 2^1 = 2$$

$$(d) \sqrt[5]{243} = (3^5)^{\frac{1}{5}} = 3^1 = 3$$

### Aufgabe 3

$$(a) \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$$

$$(b) \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{2^4}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{2}{3}$$

$$(c) \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \sqrt[3]{\frac{5^3}{2^3}} = \frac{5}{2}$$

$$(d) \sqrt[7]{\frac{1}{128}} = \sqrt[7]{\frac{1^7}{2^7}} = \frac{1}{2}$$

### Aufgabe 4

$$(a) \sqrt[4]{0.0001} = \sqrt[4]{\frac{1}{10\,000}} = \sqrt[4]{\frac{1^4}{10^4}} = \frac{1}{10}$$

$$(b) \sqrt[3]{0.125} = \sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \sqrt[3]{\frac{5^3}{10^3}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$(c) \sqrt[3]{0.008} = \sqrt[3]{\frac{8}{1000}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{10^3}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$(d) \sqrt[2]{1.44} = \sqrt{\frac{144}{100}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{100}} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1.2$$

### Aufgabe 5

$$\frac{64}{729} = \frac{2^6}{3^6} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$\sqrt{\frac{64}{729}} = \frac{\sqrt{2^6}}{\sqrt{3^6}} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

$$\sqrt[3]{\frac{64}{729}} = \frac{\sqrt[3]{2^6}}{\sqrt[3]{3^6}} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

$$\sqrt[6]{\frac{64}{729}} = \frac{\sqrt[6]{2^6}}{\sqrt[6]{3^6}} = \frac{2}{3}$$

### Aufgabe 6

(a)  $n < \sqrt[3]{100} < (n+1)$   
 $n^3 < 100 < (n+1)^3$   
 $4^3 = 64 < 100 < 125 = 5^3$

(b)  $n < \sqrt[5]{1000} < (n+1)$   
 $n^5 < 1000 < (n+1)^5$   
 $3^5 = 729 < 1000 < 1024 = 4^5$

(c)  $n < \sqrt[4]{500} < (n+1)$   
 $n^4 < 500 < (n+1)^4$   
 $4^4 = 256 < 500 < 625 = 5^4$

(d)  $n < \sqrt[4]{1\,000\,000} < (n+1)$   
 $n^4 < 1\,000\,000 < (n+1)^4$   
 $n^2 < 1000 < (n+1)^2$   
 $31^2 = 961 < 1000 < 1024 = 32^2$

### Aufgabe 7

- (a)  $(1, 2]$   
(b)  $(1, 100]$   
(c)  $[0.5, 1)$   
(d)  $[0.9, 1)$

### Aufgabe 8

(a)  $27^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3$

(b)  $49^{\frac{1}{2}} = (7^2)^{\frac{1}{2}} = 7$

(c)  $10\,000^{\frac{1}{4}} = (10^4)^{\frac{1}{4}} = 10$

(d)  $(1^5)^{\frac{1}{5}} = 1$

### Aufgabe 9

(a)  $64^{-\frac{1}{3}} = (4^3)^{-\frac{1}{3}} = 4^{3 \cdot (-\frac{1}{3})} = 4^{-1} = \frac{1}{4}$

(b)  $16^{-\frac{1}{4}} = (2^4)^{-\frac{1}{4}} = 2^{4 \cdot (-\frac{1}{4})} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

(c)  $32^{0.2} = (2^5)^{0.2} = 2^1 = 2$

(d)  $81^0 = 1$

### Aufgabe 10

(a)  $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 4^{-\frac{1}{2}} = (2^2)^{-\frac{1}{2}} = 2^{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

(b)  $\left(\frac{1}{216}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{6^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$

(c)  $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{3 \cdot \frac{1}{3}}}{3^{3 \cdot \frac{1}{3}}} = \frac{2}{3}$

(d)  $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{3 \cdot \frac{1}{3}}}{3^{3 \cdot \frac{1}{3}}} = \frac{2}{3}$

### Aufgabe 11

(a)  $8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

(b)  $32^{-\frac{2}{5}} = (2^5)^{-\frac{2}{5}} = 2^{5 \cdot (-\frac{2}{5})} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

(c)  $121^{1.5} = (11^2)^{1.5} = 11^{2 \cdot 1.5} = 11^3 = 1331$

(d)  $125^{\frac{4}{3}} = (5^3)^{\frac{4}{3}} = 5^4 = 625$

### Aufgabe 12

$$(a) 16^{1.25} = 16^{\frac{5}{4}} = (2^4)^{\frac{5}{4}} = 2^{4 \cdot \frac{5}{4}} = 2^5 = 32$$

$$(b) 81^{1.5} = (3^4)^{1.5} = 3^{4 \cdot 1.5} = 3^6 = 729$$

$$(c) 16^{-0.75} = (2^4)^{-0.75} = 2^{4 \cdot (-0.75)} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$(d) 81^{1.75} = (3^4)^{1.75} = 3^7 = 2187$$

### Aufgabe 13

$$(a) \sqrt[3]{5^4} = (5^4)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{4}{3}}$$

$$(b) \sqrt[7]{1000} = 1000^{\frac{1}{7}} = (10^3)^{\frac{1}{7}} = 10^{3 \cdot \frac{1}{7}} = 10^{\frac{3}{7}}$$

$$(c) \sqrt[6]{0.001} = \sqrt[6]{\frac{1}{1000}} = \sqrt[6]{\frac{1}{10^3}} = \sqrt[6]{10^{-3}} = 10^{-\frac{3}{6}} = 10^{-\frac{1}{2}}$$

$$(d) \sqrt[5]{0.5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}} = (2^{-1})^{\frac{1}{5}} = 2^{(-1) \cdot \frac{1}{5}} = 2^{-\frac{1}{5}}$$

### Aufgabe 14

Um die die Zahlen besser vergleichen zu können, sind sie als rationale Zahlen darzustellen.

$$(a) a = 64$$

$$b = 64^0 = 1$$

$$c = 64^{-1} = \frac{1}{64^1} = \frac{1}{64}$$

$$d = 64^1 = 64$$

$$e = 64^{1.5} = (2^6)^{1.5} = 2^9 = 512$$

$$f = 64^{-1.5} = (2^6)^{-1.5} = 2^{-9} = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}$$

$$f < c < b < a = d < e$$

$$(b) a = 10^{-3} = \frac{1}{1000}$$

$$b = 2^{-10} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$$

$$c = 625^{-0.75} = (5^4)^{-0.75} = 5^{-3} = \frac{1}{125}$$

$$d = 144^{-1.5} = (12^2)^{-1.5} = 12^{-3} = \frac{1}{12^3}$$

$$\text{Also: } d < b < a < c$$

### Aufgabe 16

$$(a) 10^{\frac{1}{3}} \cdot 10^{\frac{1}{6}} = 10^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 10^{\frac{2}{6} + \frac{1}{6}} = 10^{\frac{3}{6}} = 10^{\frac{1}{2}}$$

$$(b) 5^{0.2} \cdot 5^{0.05} = 5^{0.2+0.05} = 5^{0.25}$$

$$(c) 12^{\frac{1}{5}} \cdot 12^{\frac{1}{20}} = 12^{\frac{1}{5} + \frac{1}{20}} = 12^{\frac{4}{20} + \frac{1}{20}} = 12^{\frac{5}{20}} = 12^{\frac{1}{4}}$$

$$(d) 7 \cdot 7^{0.2} = 7^1 \cdot 7^{0.2} = 7^{1+0.2} = 7^{1.2}$$

### Aufgabe 17

$$(a) 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}} = 2^{\frac{4}{8} + \frac{1}{8}} = 2^{\frac{5}{8}}$$

$$(b) 6^{-2.5} \cdot 6^{3.5} = 6^{-2.5+3.5} = 6^1 = 6$$

$$(c) 7^{-\frac{1}{2}} \cdot 7^3 = 7^{-\frac{1}{2}+3} = 7^{2.5}$$

$$(d) 5^0 \cdot 5^{-1.5} = 5^{0+(-1.5)} = 5^{-1.5}$$

### Aufgabe 18

$$(a) \sqrt[10]{2} \cdot \sqrt[10]{2} = 2^{\frac{1}{10}} \cdot 2^{\frac{1}{10}} = 2^{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}} = 2^{\frac{2}{10}} = 2^{\frac{1}{5}}$$

$$(b) \sqrt[4]{7} \cdot 7^{0.5} = 7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{4} + \frac{2}{4}} = 7^{\frac{3}{4}}$$

$$(c) 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{-2.5} = 5^{0.5+(-2.5)} = 5^{-2}$$

$$(d) \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} = 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = 2^{\frac{2}{8} + \frac{1}{8}} = 2^{\frac{3}{8}}$$

### Aufgabe 19

$$(a) 12^{\frac{1}{3}} : 12^{\frac{1}{4}} = 12^{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = 12^{\frac{4}{12} - \frac{3}{12}} = 12^{\frac{1}{12}}$$

$$(b) 5^{\frac{1}{6}} : 5^{\frac{1}{9}} = 5^{\frac{1}{6} - \frac{1}{9}} = 5^{\frac{6}{36} - \frac{4}{36}} = 5^{\frac{2}{36}} = 5^{\frac{1}{18}}$$

$$(c) 3^0 : 3^{-1.5} = 3^{0-(-1.5)} = 3^{1.5}$$

$$(d) 2^{\frac{3}{4}} : 2 = 2^{\frac{3}{4}} : 2^1 = 2^{\frac{3}{4} - 1} = 2^{-\frac{1}{4}}$$

### Aufgabe 20

$$(a) \sqrt[3]{2} : \sqrt[5]{2} = 2^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}} = 2^{\frac{5}{15}-\frac{3}{15}} = 2^{\frac{2}{15}}$$

$$(b) \sqrt[5]{2} : \sqrt[10]{2} = 2^{\frac{1}{5}} : 2^{\frac{1}{10}} = 2^{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}} = 2^{\frac{2}{10}-\frac{1}{10}} = 2^{\frac{1}{10}}$$

$$(c) \sqrt[5]{2} : 2^{0.2} = 2^{\frac{1}{5}} : 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}} = 2^0 = 1$$

$$(d) 2 : \sqrt[10]{2} = 2^1 : 2^{\frac{1}{10}} = 2^{1-\frac{1}{10}} = 2^{\frac{9}{10}}$$

### Aufgabe 21

$$(a) 3^{0.3} : 3^{0.4} = 3^{0.3-0.4} = 3^{-0.1}$$

$$(b) 7^{-2} : 7^{2.5} = 7^{-2-2.5} = 7^{-4.5}$$

$$(c) 10 : 10^{-1.5} = 10^1 : 10^{-1.5} = 10^{1-(-1.5)} = 10^{2.5}$$

$$(d) 2^{0.75} : 2 = 2^{0.75} : 2^1 = 2^{0.75-1} = 2^{-0.25}$$

### Aufgabe 22

$$(a) \left(5^{\frac{2}{3}}\right)^6 = 5^{\frac{2}{3} \cdot 6} = 5^4 = 625$$

$$(b) \left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^4 = 3^{-\frac{1}{2} \cdot 4} = 3^{-2} \left[ = \frac{1}{9} \right]$$

$$(c) \left(10^{\frac{3}{4}}\right)^2 = 10^{\frac{3}{4} \cdot 2} = 10^{\frac{3}{2}}$$

$$(d) \left(10^2\right)^{\frac{3}{4}} = 10^{2 \cdot \frac{3}{4}} = 10^{\frac{3}{2}}$$

### Aufgabe 23

$$(a) \left(10^{0.2}\right)^{2.5} = \left(10^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{5}{2}} = 10^{\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2}} = 10^{\frac{1}{2}} \left[ = 10^{0.5} \right]$$

$$(b) \left(3^{-4}\right)^{-1.5} = 3^{-4 \cdot (-1.5)} = 3^6 = 729$$

$$(c) \left(\sqrt[4]{2}\right)^{10} = \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{10} = 2^{\frac{1}{4} \cdot 10} = 2^{\frac{5}{2}}$$

$$(d) \left(\sqrt{2}\right)^5 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^5 = 2^{\frac{1}{2} \cdot 5} = 2^{\frac{5}{2}}$$



### Aufgabe 24

$$(a) \sqrt[3]{3^{1.5}} = (3^{1.5})^{\frac{1}{3}} = 3^{1.5 \cdot \frac{1}{3}} = 3^{0.5} [= \sqrt{3}]$$

$$(b) \sqrt[4]{5^{0.8}} = 5^{\frac{0.8}{4}} = 5^{0.2}$$

$$(c) \sqrt[4]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[4]{2^{\frac{1}{3}}} = (2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{12}}$$

$$(d) \sqrt{\sqrt[5]{10}} = \sqrt{10^{\frac{1}{5}}} = (10^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{10}}$$

### Aufgabe 25

$$(a) 2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} = (2 \cdot 4)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 2^1 = 2$$

$$(b) 4^{\frac{2}{3}} \cdot 16^{\frac{2}{3}} = (4 \cdot 16)^{\frac{2}{3}} = 64^{\frac{2}{3}} = (2^6)^{\frac{2}{3}} = 2^4 = 16$$

$$(c) 5^{\frac{3}{4}} \cdot 10^{\frac{3}{4}} = (5 \cdot 10)^{\frac{3}{4}} = 50^{\frac{3}{4}}$$

$$(d) 5^{-0.5} \cdot 20^{-0.5} = (5 \cdot 20)^{-0.5} = 100^{-0.5} = (10^2)^{-0.5} \\ = 10^{2 \cdot (-0.5)} = 10^{-1} [= 0.1]$$

### Aufgabe 26

$$(a) 0.5^{\frac{1}{7}} \cdot 256^{\frac{1}{7}} = (0.5 \cdot 256)^{\frac{1}{7}} = 128^{\frac{1}{7}} = (2^7)^{\frac{1}{7}} = 2$$

$$(b) 4^{\frac{5}{4}} \cdot 20.25^{\frac{5}{4}} = (4 \cdot 20.25)^{\frac{5}{4}} = 81^{\frac{5}{4}} = (3^4)^{\frac{5}{4}} = 3^5 = 243$$

$$(c) 1.6^{0.5} \cdot 40^{0.5} = (1.6 \cdot 40)^{0.5} = 64^{0.5} = (8^2)^{0.5} = 8$$

$$(d) 8^{0.5} \cdot 0.125^{0.5} = (8 \cdot 0.125)^{0.5} = 1^{0.5} = 1$$

### Aufgabe 27

$$(a) \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{2} = 8^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = (8 \cdot 2)^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2^{4 \cdot \frac{1}{4}} = 2^1 = 2$$

$$\text{oder: } \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{8 \cdot 2} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

$$(b) \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{9}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}} \\ = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3 \cdot \frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3} = 3^{-1}$$

$$(c) 1000^{0.1} \cdot 1.024^{0.1} = (1000 \cdot 1.024)^{0.1} = 1024^{0.1} \\ = (2^{10})^{0.1} = 2^{10 \cdot 0.1} = 2^1 = 2$$

$$(d) \sqrt{10} \cdot \sqrt{40} = \sqrt{400} = 20$$

### Aufgabe 28

$$(a) 100^{\frac{1}{3}} : 12.5^{\frac{1}{3}} = (100 : 12.5)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 2^1 = 2$$

$$(b) 60^{0.2} : 12^{0.2} = (60 : 12)^{0.2} = 5^{0.2}$$

$$(c) 20^{1.5} : 0.2^{1.5} = (20 : 0.2)^{1.5} = 100^{1.5} = (10^2)^{1.5} = 10^3 = 1000$$

$$(d) 1.5^{10} : \left(\frac{3}{2}\right)^{10} = 1.5^{10} : 1.5^{10} = 1$$

### Aufgabe 29

$$(a) \sqrt[3]{120} : \sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{120 : 15} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

$$(b) \sqrt[4]{50} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{50 : 2} = \sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$(c) 128^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{1}{3}} = (128 : 2)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3}} = 4$$

$$(d) 7^{-0.5} : 700^{-0.5} = (7 : 700)^{-0.5} = \left(\frac{1}{100}\right)^{-0.5} = \left(\left(\frac{1}{10}\right)^2\right)^{-0.5} \\ = \left(\frac{1}{10}\right)^{2 \cdot (-0.5)} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = 10$$

### Aufgabe 30

$$(a) 7^{3.5} : 1^{3.5} = (7 : 1)^{3.5} = 7^{3.5}$$

$$(b) 14^{3.5} : 3.5^{3.5} = (14 : 3.5)^{3.5} = 4^{3.5} = (2^2)^{3.5} = 2^7 = 128$$

$$(c) 10\,000^{-\frac{1}{3}} : 10^{-\frac{1}{3}} = (10\,000 : 10)^{-\frac{1}{3}} = 1000^{-\frac{1}{3}} \\ = (10^3)^{-\frac{1}{3}} = 10^{3 \cdot \frac{-1}{3}} = 10^{-1}$$

$$(d) 8100^{0.25} : 100^{0.25} = (8100 : 100)^{0.25} = 81^{0.25} \\ = (3^4)^{0.25} = 3^1 = 3$$

### Aufgabe 32

$$(a) (10^{0.5} : 10^{-1.5}) \cdot 10^{2.5} = 10^{0.5 - (-1.5)} \cdot 10^{2.5} = 10^2 \cdot 10^{2.5} = 10^{4.5}$$

$$(b) (10^{0.75} \cdot 10^{0.15}) : 10^{0.25} = 10^{0.75+0.15} : 10^{0.25} = 10^{0.9} : 10^{0.25} \\ = 10^{0.9-0.25} = 10^{0.65}$$

$$(c) (10^{-0.5} : 10^2) : 10^{-1.5} = 10^{-0.5-2-(-1.5)} = 10^{-1} = 0.1$$

### Aufgabe 33

$$(a) \left(a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{5}}\right) \cdot a^{\frac{1}{10}} = a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{1}{10}} = a^{\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10}} = a^{\frac{5}{20} - \frac{4}{20} + \frac{2}{20}} = a^{\frac{3}{20}}$$

$$(b) a^{\frac{3}{4}} : \left(a^{\frac{2}{3}} : a\right) = a^{\frac{3}{4}} : a^{\frac{2}{3}} \cdot a^1 = a^{\frac{3}{4} - \frac{2}{3} + 1} = a^{\frac{9}{12} - \frac{8}{12} + \frac{12}{12}} = a^{\frac{13}{12}}$$

$$(c) \left(a^{\frac{3}{4}} : a^{\frac{2}{3}}\right) : a = a^{\frac{3}{4}} : a^{\frac{2}{3}} : a^1 = a^{\frac{3}{4} - \frac{2}{3} - 1} = a^{\frac{9}{12} - \frac{8}{12} - \frac{12}{12}} \\ = a^{\frac{9}{12} - \frac{8}{12} - \frac{12}{12}} = a^{-\frac{11}{12}}$$

### Aufgabe 34

$$(a) \left(\pi^{0.5} : \pi\right) \cdot \pi^{-0.5} = \pi^{0.5-1-0.5} = \pi^{-1}$$

$$(b) \left(\pi^{0.75} \cdot \pi^{0.75}\right)^{0.5} = \left(\pi^{0.75+0.75}\right)^{0.5} = \left(\pi^{1.5}\right)^{0.5} = \pi^{0.75}$$

$$(c) \pi \cdot \pi^2 \cdot \pi^{-0.5} = \pi^{1+2+(-0.5)} = \pi^{2.5}$$

### Aufgabe 35

$$(a) 0.32^{0.2} \cdot 10^{0.4} = 0.32^{0.2} \cdot 10^{2 \cdot 0.2} = 0.32^{0.2} \cdot (10^2)^{0.2} \\ = (0.32 \cdot 10^2)^{0.2} = 32^{\frac{1}{5}} = (2^5)^{\frac{1}{5}} \\ = 2^{5 \cdot \frac{1}{5}} = 2^1 = 2$$

$$(b) 32^{12} : 2^{15} = (2^5)^{12} : 2^{15} = 2^{60} : 2^{15} = 2^{60-15} = 2^{45}$$

$$(c) 11 \cdot 2^7 + 21 \cdot 2^7 = 2^7(11 + 21) = 32 \cdot 2^7 = 2^5 \cdot 2^7 = 2^{12}$$

### Aufgabe 36

$$(a) 8^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} + 81^{\frac{1}{4}} - 125^{\frac{1}{3}} - 1000^{\frac{2}{3}} \\ = (2^3)^{\frac{2}{3}} + (2^4)^{\frac{1}{2}} + (3^3)^{\frac{2}{3}} + (3^4)^{\frac{1}{4}} - (5^3)^{\frac{1}{3}} - (10^3)^{\frac{2}{3}} \\ = 2^2 + 2^2 + 3^2 + 3 - 5 - 10^2 = -85$$

$$(b) 16^{\frac{1}{4}} + 8^{\frac{4}{3}} + 36^{\frac{3}{2}} - 125^{\frac{2}{3}} - 27^{\frac{4}{3}} \\ = (2^4)^{\frac{1}{4}} + (2^3)^{\frac{4}{3}} + (6^2)^{\frac{3}{2}} - (5^3)^{\frac{2}{3}} - (2^3)^{\frac{4}{3}} \\ = 2 + 16 + 216 - 25 - 81 = 128$$

### Aufgabe 37

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & (3 \cdot 32^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 108^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot 256^{\frac{1}{3}}) \cdot 2^{\frac{1}{3}} \\ &= 3 \cdot 32^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 108^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot 256^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \\ &= 3 \cdot (32 \cdot 2)^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot (108 \cdot 2)^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot (256 \cdot 2)^{\frac{1}{3}} \\ &= 3 \cdot 64^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 216^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot 512^{\frac{1}{3}} \\ &= 3 \cdot 4 + 3 \cdot 6 - 4 \cdot 8 \\ &= 12 + 18 - 32 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & (3 \cdot 2^{0.25} + 2 \cdot 32^{0.25} - 8^{0.75}) \cdot 8^{0.25} \\ &= (3 \cdot 2^{0.25} + 2 \cdot 2^{1.25} - 2^{2.25}) \cdot 2^{0.75} \\ &= 3 \cdot 2^{0.25} \cdot 2^{0.75} + 2 \cdot 2^{1.25} \cdot 2^{0.75} - 2^{2.25} \cdot 2^{0.75} \\ &= 3 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 - 2^3 \\ &= 6 + 8 - 8 = 6 \end{aligned}$$

### Aufgabe 38

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & (24^{\frac{1}{3}} + 2 \cdot 81^{\frac{1}{3}} - 3 \cdot 192^{\frac{1}{3}}) : 3^{\frac{1}{3}} \\ &= 24^{\frac{1}{3}} : 3^{\frac{1}{3}} + 2 \cdot 81^{\frac{1}{3}} : 3^{\frac{1}{3}} - 3 \cdot 192^{\frac{1}{3}} : 3^{\frac{1}{3}} \\ &= 8^{\frac{1}{3}} + 2 \cdot 27^{\frac{1}{3}} - 3 \cdot 64^{\frac{1}{3}} \\ &= 2 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = 2 + 6 - 12 = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & (16^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot 128^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 250^{\frac{1}{3}}) : 2^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot 64^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 125^{\frac{1}{3}} \\ &= 2 - 16 + 15 = 1 \end{aligned}$$

### Aufgabe 39

$$\text{(a)} \quad \sqrt[1001]{577} = 1.132$$

$$\text{(b)} \quad \sqrt[77]{5^{1001}} = 1.221 \cdot 10^9$$

$$\text{(c)} \quad \sqrt[1001]{5^{91}} = 1.158$$

$$\text{(d)} \quad \sqrt[91]{5^{1001}} = 4.883 \cdot 10^7$$

### Aufgabe 40

$$\text{(a)} \quad xy = a^3 b^{0.5} a^{-0.5} b^{1.5} = a^{2.5} b^2$$

$$\text{(b)} \quad x^2 y = (a^3 b^{0.5}) a^{-0.5} b^{1.5} = a^6 b a^{-0.5} b^{1.5} = a^{5.5} b^{2.5}$$

$$\text{(c)} \quad x : y^2 = a^3 b^{0.5} \cdot (a^{-0.5} b^{1.5})^{-2} = a^3 b^{0.5} a b^{-3} = a^4 b^{-2.5}$$

### Aufgabe 41

$$(a) \sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt{2^{\frac{1}{3}}} = (2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{6}}$$

$$\text{oder: } \sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[2 \cdot 3]{2} = \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{6}}$$

$$(b) \sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[3 \cdot 4]{2} = \sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}$$

$$\text{oder: } \sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[3 \cdot 4]{2} = \sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}$$

$$(c) \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2\sqrt{2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{2\sqrt{2^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{2^1 \cdot \sqrt{2^{\frac{3}{2}}}}$$
$$= \sqrt{2^1 \cdot (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2^1 \cdot 2^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{2^{\frac{4}{4} + \frac{3}{4}}} = \sqrt{2^{\frac{7}{4}}}$$
$$= (2^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{8}}$$

$$(d) \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{2}}} = (2^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{1}{6}}$$

### Aufgabe 42

$$(a) 9^{1.5} = (3^2)^{1.5} = 3^3 = 27 \in \mathbb{N} \text{ (wahr)}$$

$$(b) 5^{1.5} < 11 \quad || \text{quadrieren}$$

$$(5^{1.5})^2 < 11^2$$

$$5^3 < 11^2$$

$$125 < 121 \quad \text{falsch}$$

$$(c) 0.5^{0.5} > 0.5$$

$$(0.5^{0.5})^2 > 0.5^2$$

$$0.5 > 0.5^2$$

$$0.5 > 0.25 \quad \text{wahr}$$

$$(d) \pi^{100} < 9^{50}$$

$$\pi^{100} < (3^2)^{50}$$

$$\pi^{100} < 3^{100} \quad \text{falsch, da } \pi \approx 3.14$$

### Aufgabe 43

$$(a) 9^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ (wahr)}$$

$$(b) \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[3]{2}$$

$$(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{3}} \quad \text{falsch}$$

$$(c) \quad 27^{\frac{2}{3}} + 64^{\frac{2}{3}} = 125^{\frac{2}{3}}$$

$$(3^3)^{\frac{2}{3}} + (2^6)^{\frac{2}{3}} = (5^3)^{\frac{2}{3}}$$

$$3^2 + 2^4 = 5^2$$

$$9 + 16 = 25$$

$$25 = 25 \quad \text{wahr}$$

$$(d) \quad 16^{0.75} = (2^4)^{0.75} = 2^3 = 8 \in \mathbb{R}$$

#### Aufgabe 44

$$(a) \quad \left(2 + \frac{2}{3}\right)^{0.5} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{0.5} \quad ||^2$$

$$\left[\left(2 + \frac{2}{3}\right)^{0.5}\right]^2 = \left[2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{0.5}\right]^2$$

$$2 + \frac{2}{3} = 4 \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{8}{3} = \frac{8}{3} \quad \text{wahr}$$

$$(b) \quad \left(2 + \frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{3}} \quad ||^3$$

$$\left[\left(\frac{16}{7}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^3 = \left[2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^3$$

$$\frac{16}{7} = 8 \cdot \frac{2}{7}$$

$$\frac{16}{7} = \frac{16}{7} \quad \text{wahr}$$

#### Aufgabe 45

- (a) Beide Zahlen sind mit  $\text{kgV}(2, 3) = 6$  zu potenzieren, damit aus den gebrochenen Exponenten ganzzahlige Exponenten werden:

$$a^6 = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 3^3 = 27$$

$$b^6 = \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^6 = 5^2 = 25$$

Da das Potenzieren die Grössenbeziehungen erhält, ist  $b < a$ .

- (b) Beide Zahlen sind mit 20 zu potenzieren, damit aus den gebrochenen Exponenten ganzzahlige Exponenten werden und die Potenzen im Kopf gerechnet werden können:

$$a^{20} = \left(4\frac{1}{4}\right)^{20} = 4^5 = 1024$$

$$b^{20} = \left(5\frac{1}{5}\right)^{20} = 5^4 = 625$$

Da das Potenzieren die Grössenbeziehungen erhält, ist  $b$  die kleinere Zahl

- (c) Beide Zahlen sind mit 12 zu potenzieren, damit aus den gebrochenen Exponenten ganzzahlige Exponenten werden und die Potenzen im Kopf gerechnet werden können:

$$a^{12} = \left(10\frac{1}{12}\right)^{12} = 10$$

$$b^{12} = \left(2\frac{1}{3}\right)^{12} = 2^4 = 16$$

Da das Potenzieren die Grössenbeziehungen erhält, ist  $a$  die kleinere Zahl.

### Aufgabe 46

- (a) Potenziere beide Zahlen mit 3:

$$a^3 = \left(2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3}\right)^3 = 2 + 3 \cdot 2\frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{3} + 3 \cdot 2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{2}{3} + 3 > 5$$

$$b^3 = 5$$

Wegen  $a^3 > 1$  und  $b^3 > 1$  ist  $a > b$ .

- (b) Potenziere beide Zahlen mit 3:

$$a^3 = \left(2 \cdot 2\frac{1}{3}\right)^3 = 8 \cdot 2 = 16$$

$$b^3 = \left(15\frac{1}{3}\right)^3 = 15$$

Wegen  $a^3 > 1$  und  $b^3 > 1$  ist  $a > b$ .

### Aufgabe 47

$$a = \frac{1}{2} \cdot (12^{99} + 12^{100}) = \frac{1}{2} \cdot 12^{99}(1 + 12) = \frac{13}{2} \cdot 12^{99} = 6.5 \cdot 12^{99}$$

$$b = 12^{99.5} = 12^{99+0.5} = 12^{99} \cdot 12^{0.5} = \sqrt{12} \cdot 12^{99}$$

Da  $\sqrt{12}$  zwischen 3 und 4 liegt, muss  $a$  grösser sein.

### Aufgabe 48

(a)  $8^x = 2$

$$2^{3x} = 2^1$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$(b) \quad 16^{0.75} = x$$

$$(2^4)^{0.75} = x$$

$$2^3 = x$$

$$x = 8$$

$$(c) \quad x^{1.5} = 1000$$

$$(x^{1.5})^2 = 1000^2$$

$$x^3 = 10^6 = 100^3$$

$$x = 100$$

$$(d) \quad 2^{4x} = 2^{-1}$$

$$4x = -1$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

### Aufgabe 49

$$(a) \quad 4^x = 8$$

$$2^{2x} = 2^3$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$(b) \quad 8^x = 4$$

$$2^{3x} = 2^2$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$(c) \quad 9^x = 1$$

$$9^x = 9^0$$

$$x = 0$$

$$(d) \quad 3^{2x} = 3^3$$

$$2x = 3$$

$$x = 1.5$$



## Aufgabe 50

$$(a) 2^x = \frac{1}{2}$$

$$2^x = 2^{-1}$$

$$x = -1$$

$$(b) 2^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2^x = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$$

$$2^x = 2^{-\frac{1}{2}}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$(c) 9^{0.25} = 3^x$$

$$(3^2)^{0.25} = 3^x$$

$$3^{0.5} = 3^x$$

$$x = 0.5$$

$$(d) 81^{\frac{1}{5}} = 3^x$$

$$3^{\frac{4}{5}} = 3^x$$

$$x = \frac{4}{5}$$

## Aufgabe 51

$$(a) 9^{50} = 27^x$$

$$3^{100} = 3^{3x}$$

$$100 = 3x$$

$$x = \frac{100}{3}$$

$$(b) 2^{-4x} = 2^{10}$$

$$-4x = 10$$

$$x = -2.5$$

$$(c) 25^{100} = 125^x$$

$$5^{200} = 5^{3x}$$

$$200 = 3x$$

$$x = \frac{200}{3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad & 10^{3x} = 100^{12} \\
 & 10^{3x} = 10^{24} \\
 & 3x = 24 \\
 & x = 8
 \end{aligned}$$

### Aufgabe 52

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & x^3 = -64 \\
 & x^3 = (-4)^3 \\
 & x = -4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad & x^{3.5} = 10\,000\,000 \\
 & x^{3.5} = 10^7 = 100^{3.5} \\
 & x = 100
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad & x^4 = 10^{-4} \\
 & x^4 = \left(\frac{1}{10}\right)^4 \\
 & x = \pm \frac{1}{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad & x^{1.5} = 7^{1.5} \\
 & x = 7
 \end{aligned}$$

### Aufgabe 53

$$\text{(a)} \quad x^6 = -729 \text{ unlösbar} \quad (\text{für } x \in \mathbb{R} \text{ ist } x^6 \geq 0)$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad & x^{-6} = 729 \\
 & x^{-6} = 3^6 \\
 & \left(\frac{1}{x}\right)^6 = 3^6 \\
 & \frac{1}{x} = \pm 3 \\
 & x = \pm \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad & x^{-2.5} = 3^{2.5} \\
 & \left(\frac{1}{x}\right)^{2.5} = 3^{2.5} \\
 & \frac{1}{x} = 3 \\
 & x = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad & 4^{-3.3} = 2^x \\
 & 2^{-6.6} = 2^x \\
 & x = -6.6
 \end{aligned}$$

### Aufgabe 54

(a)  $2^6 = 2^{4x-2}$

$$6 = 4x - 2$$

$$8 = 4x$$

$$x = 2$$

(b)  $3^{4x} = 9^{x+5}$

$$3^{4x} = 3^{2x+10}$$

$$4x = 2x + 10$$

$$x = 5$$

(c)  $10^{5x-2.5} = 10^{4x-1}$

$$5x - 2.5 = 4x - 1$$

$$x = 1.5$$

### Aufgabe 55

(a)  $0.1^x = 1000$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^x = 10^3$$

$$10^{-x} = 10^3$$

$$-x = 3$$

$$x = -3$$

(b)  $x^{0.1} = 1000$

$$x^{0.1} = 10^3$$

$$(x^{0.1})^{10} = (10^3)^{10}$$

$$x^1 = x = 10^{30}$$

(c)  $x^{0.2} = 2$

$$(x^{0.2})^5 = 2^5$$

$$x^1 = x = 32$$

(d)  $0.5^{2x+2} = 2$

$$2^{-(2x+2)} = 2^1$$

$$-2x - 2 = 1$$

$$x = -1.5$$

### Aufgabe 56

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad 3^{2x+1} &= 81 \\
3^{2x+1} &= 3^4 \\
2x + 1 &= 4 \\
2x &= 3 \\
x &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \quad 5^{2x+1} &= 3125 \\
5^{2x+1} &= 5^5 \\
2x + 1 &= 5 \\
x &= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(c)} \quad 5^{2x} - 0.0016 &= 0 \\
5^{2x} &= \frac{16}{10\,000} \\
5^{2x} &= \frac{2^4}{10^4} \\
5^{2x} &= \left(\frac{2}{10}\right)^4 \\
5^{2x} &= \left(\frac{1}{5}\right)^4 \\
5^{2x} &= 5^{-4} \\
2x &= -4 \\
x &= -2
\end{aligned}$$

### Aufgabe 57

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad 5^{x+2} \cdot 25^{-x} &= 625 \\
5^{x+2} \cdot 5^{-2x} &= 5^4 \\
5^{x+2-2x} &= 5^4 \\
5^{2-x} &= 5^4 \\
2 - x &= 4 \\
x &= -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \quad 4 \cdot 2^x \cdot 32 &= 4^x \\
2^2 \cdot 2^x \cdot 2^5 &= 2^{2x} \\
2^{x+7} &= 2^{2x} \\
x + 7 &= 2x \\
x &= 7
\end{aligned}$$

### Aufgabe 58

(a)  $4 \cdot 2^x + 32 = 4^x$

$$4 \cdot 2^x + 32 = (2^x)^2$$

Substituiere  $2^x = u$ :

$$4 \cdot u + 32 = u^2$$

$$u^2 - 4u - 32 = 0$$

$$(u + 4)(u - 8) = 0$$

$$u_1 = -4 = 2^x \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

$$u_2 = 8 = 2^x \Rightarrow x = 3$$

(b)  $9^{2x} + 3 = 4 \cdot 9^x$

$$(9^x)^2 + 3 = 4 \cdot 9^x$$

Substituiere  $9^x = u$ :

$$u^2 + 3 = 4u$$

$$u^2 - 4u + 3 = 0$$

$$(u - 3)(u - 1) = 0$$

$$u_1 = 3 = 9^x \Rightarrow 3^1 = 3^{2x} \Rightarrow x_1 = 0.5$$

$$u_2 = 1 = 9^x \Rightarrow 9^0 = 9^x \Rightarrow x_2 = 0$$

(c)  $3^x + 729 \cdot (3^x)^{-1} = 90$

Substituiere  $3^x = a$ :

$$a + 729 \cdot \frac{1}{a} = 90$$

$$a^2 - 90a + 729 = 0$$

$$(a - 81)(a - 9) = 0$$

$$a_1 = 81$$

$$a_2 = 9$$

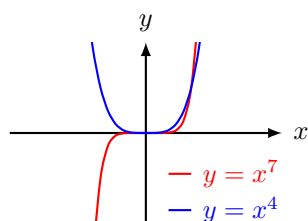
Substitution rückgängig machen:

$$a_1 = 81 = 3^4 = 3^x \Rightarrow x_1 = 4$$

$$a_2 = 9 = 3^2 = 3^x \Rightarrow x_2 = 2$$

## Aufgabe 59

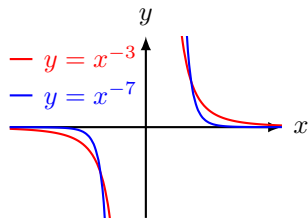
(a) Graph:



(b) Schnittpunkte:  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$

### Aufgabe 60

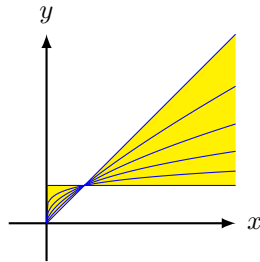
(a) Graph:



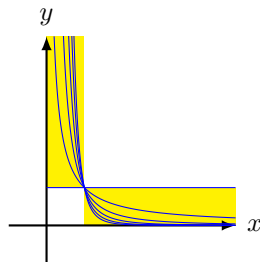
(b) Schnittpunkte:  $(-1, -1)$ ,  $(1, 1)$

### Aufgabe 61

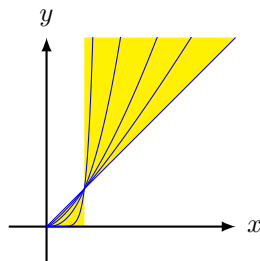
(a)  $x^r$  mit  $0 \leq r \leq 1$ :



(b)  $x^r$  mit  $-\infty < r \leq 0$ :



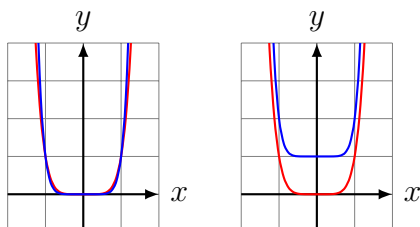
(c)  $x^r$  mit  $1 \leq r < \infty$ :



### Aufgabe 62

Die beiden Kurven besitzen keinen Schnittpunkt.

*Begründung:* Der Graph von  $y = x^8$  verläuft für  $|x| > 1$  steiler als der Graph von  $y = x^6$ . Verschiebt man also  $x^8$  um eine Einheit nach oben, so „verschwinden“ die drei Schnittpunkte, welche die Graphen von  $y = x^8$  und  $y = x^6$  noch haben.

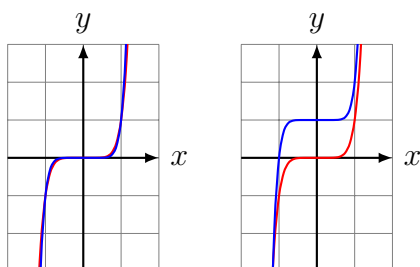


### Aufgabe 63

Die beiden Kurven besitzen genau einen Schnittpunkt.

*Begründung:* Der Graph von  $y = x^9$  verläuft für  $|x| > 1$  steiler als der Graph von  $y = x^7$ . Verschiebt man also  $x^9$  um eine Einheit nach oben, so „verschwindet“ der Schnittpunkt im ersten Quadranten.

Anders ist es mit dem Schnittpunkt von  $y = x^9$  und  $y = x^7$  im dritten Quadranten. Dieser wird durch die Translation um eine Einheit nach oben nach unten verschoben.



### Aufgabe 64

Der Graph der Funktionen  $y = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ist für ungerade  $n$  monoton steigend.

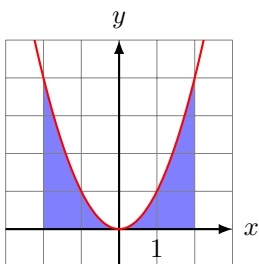
### Aufgabe 65

Der Graph der Funktionen  $y = x^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ist für gerade  $n$  symmetrisch zur  $y$ -Achse.

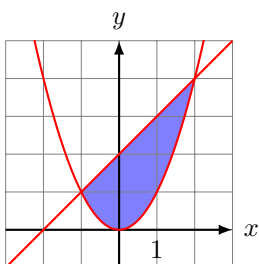
### Aufgabe 66

- (a)  $D = \mathbb{R}$ ,  $W = [0, -\infty)$
- (b)  $D = \mathbb{R}$ ,  $W = [-2, \infty)$
- (c)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ ,  $W = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

### Aufgabe 67



### Aufgabe 68



$$\{P(x, y): x^2 \leq y \leq x + 2 \wedge -4 \leq x \leq 4\}$$

Die  $x$ -Koordinaten müssen  $-4 \leq x \leq 4$  erfüllen ...

UND

... die  $y$ -Koordinaten müssen unten durch den Graphen von  $y = x^2$  und oben durch den Graphen von  $y = x + 2$  begrenzt sein.

### Aufgabe 69

Spiegeln des Graphen von  $y = x^3$  an der  $y$ -Achse bedeutet, dass  $x$  durch  $-x$  ersetzt werden muss:

$$y = (-x)^3 = -x^3$$

### Aufgabe 70

Spiegeln des Graphen von  $y = x^4$  an der  $x$ -Achse bedeutet, dass die Variable  $y$  durch  $-y$  ersetzt werden muss:

$$\begin{aligned} -y &= x^4 \\ y &= -x^4 \end{aligned}$$

### Aufgabe 71

Verschieben des Graphen von  $y = x^2$  um  $+3$  Einheiten in  $x$ -Richtung bedeutet, dass in der Gleichung die Variable  $x$  durch  $x - 3$  ersetzt werden muss:

$$y = (x - 3)^5$$



### Aufgabe 72

(a) Spiegeln an der  $y$ -Achse:  $(x \rightarrow -x)$

$$y = (-x)^2 - 2(-x) + 5 = x^2 + 2x + 5$$

Verschieben um  $-3$  Einheiten in  $x$ -Richtung:  $(x \rightarrow (x + 3))$

$$y = (x + 3)^2 + 2(x + 3) + 5 = \dots = x^2 + 8x + 20$$

(b) Verschieben um  $-3$  Einheiten in  $x$ -Richtung:  $(x \rightarrow (x + 3))$

$$y = (x + 3)^2 - 2(x + 3) + 5 = \dots = x^2 + 4x + 8$$

Spiegeln an der  $y$ -Achse:  $(x \rightarrow -x)$

$$y = (-x)^2 + 4(-x) + 8 = x^2 - 4x + 8$$

### Aufgabe 73

$$f: y = x^2 - 2$$

### Aufgabe 74

$$f: y = (x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$$

### Aufgabe 75

$$f: y = (x + 2)^2 + 2 = x^2 + 4x + 6$$

### Aufgabe 76

$$f: y = -x^2 + 3 \text{ (?)}$$

### Aufgabe 77

$$\text{Ansatz: } y = x^4$$

$$8 = (-2)^4 \quad \text{ok}$$

$$1 = (-1)^4 \quad \text{ok}$$

$$1 = (+1)^4 \quad \text{ok}$$

$$8 = (+2)^4 \quad \text{ok}$$

$$f: y = x^4$$

### Aufgabe 78

$$\text{Ansatz } y = (x - 1)^3$$

$$-8 = (-1 - 1)^3 \quad (\text{ok})$$

$$-1 = (0 - 1)^3 \quad (\text{ok})$$

$$0 = (1 - 1)^3 \quad (\text{ok})$$

$$1 = (2 - 1)^3 \quad (\text{ok})$$

$$8 = (3 - 1)^3 \quad (\text{ok})$$

$$f: y = (x - 1)^3$$

### Aufgabe 79

$$\text{Ansatz: } y = -x^{-2}$$

$$-1 = -(-1)^{-2} = -\frac{1}{(-1)^2} = -\frac{1}{1} \quad (\text{ok})$$

$$-4 = -(-0.5)^{-2} = -\frac{1}{(-0.5)^2} = -\frac{1}{(0.25)} \quad (\text{ok})$$

$$-4 = -(+0.5)^{-2} = -\frac{1}{0.25} \quad (\text{ok})$$

$$-1 = -(+1)^{-2} = -\frac{1}{(1)^2} = -\frac{1}{1} \quad (\text{ok})$$

$$f: y = -x^{-2}$$

### Aufgabe 80

$$(a) f^{-1}: y = x - 4$$

$$(b) f^{-1}: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$(c) f^{-1}: y = \frac{3}{2}x - 6$$

### Aufgabe 81

$$(a) f^{-1}: y = 1/x$$

$$(b) f^{-1}: y = \sqrt{x - 1}$$

$$(c) f^{-1}: y = \sqrt{x - 3} - 1$$

### Aufgabe 82

Bestimmung der Umkehrfunktion:

$$\bullet y = 2x - 4 \quad \Rightarrow \quad 2x = y + 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}y + 2$$

- $y = \frac{1}{2}x + 2$

Einsetzen der Funktion in die Umkehrfunktion und umgekehrt:

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= f\left(\frac{1}{2}x + 2\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}x + 2\right) - 4 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2}x + 2 \cdot 2 - 4 = x + 4 - 4 = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}(2x - 4) = \frac{1}{2} \cdot (2x - 4) + 2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2x - \frac{1}{2} \cdot 4 + 2 = x - 2 + 2 = x \end{aligned}$$

Also gilt:  $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$

### Aufgabe 83

$$A(1, 3): y = p \cdot x^q$$

$$3 = p \cdot 1^q = p$$

$$p = 3$$

$$B(2, 48): y = 3 \cdot x^q$$

$$48 = 3 \cdot 2^q$$

$$16 = 2^q$$

$$q = 4$$

### Aufgabe 84

$$A(-2, 1): 1 = p \cdot (-2)^q \quad (1)$$

$$B(4, 0.25): 0.25 = p \cdot 4^q \quad (2)$$

$$(2)/(1): \frac{0.25}{1} = \frac{p \cdot 4^q}{p \cdot (-2)^q}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{4^q}{(-2)^q}$$

$$\frac{1}{4} = (-2)^q$$

$$q = -2$$

$$(1): 1 = p \cdot (-2)^{-2}$$

$$1 = p \cdot \frac{1}{4}$$

$$p = 4$$