# Potenzen und Wurzeln
## Theorie

# Inhaltsverzeichnis



Version vom 15. November 2019

# 1 Potenzen mit ganzen Exponenten

Wir definieren Potenzen $a^n$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ *rekursiv*:

$a^1 = a \quad$ (Definition)

$a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a$

$a^3 = a^2 \cdot a = a \cdot a \cdot a$

$\ldots$

$$a^n = a^{n-1} \cdot a = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

Für $a \neq 0$ können wir Potenzen auch für die übrigen ganzzahligen Exponenten definieren, indem wir fortgesetzt durch $a$ dividieren:

$a^1 = a \quad$ (Definition)

$a^0 = a : a = 1$

$$a^{-1} = a^0 : a = \frac{1}{a}$$

$$a^{-2} = a^{-1} : a = \frac{1}{a \cdot a}$$

$$a^{-3} = a^{-2} : a = \frac{1}{a \cdot a \cdot a}$$

$\ldots$

$$a^{-n} = a^{-(n-1)} : a = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}}$$

### Spezialfälle

- $1^p = 1$ für alle $p \in \mathbb{Z}$
- $0^p = 0$ für alle $p \in \mathbb{N} \quad$ ($0^0$ ist nicht definiert!)
- $a^0 = 1$ für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $(-1)^p = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \in \mathbb{Z} \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } p \in \mathbb{Z} \text{ ungerade} \end{cases}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^{p}$ und insbesondere $a^{-p} = \left(\frac{1}{a}\right)^{p} = \frac{1^p}{a^p} = \frac{1}{a^p}$

**Repetition: Lerne die Potenzen $b^e$ auswendig**

| | $b = 2$ | $b = 3$ | $b = 4$ | $b = 5$ | $b = 6$ | $b = 7$ | $b = 8$ | $b = 9$ | $b = 10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e = 2$ | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 |
| $e = 3$ | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | | | | |
| $e = 4$ | 16 | 64 | 256 | 1024 | | | | | |
| $e = 5$ | 25 | 125 | 625 | | | | | | |
| $e = 6$ | 36 | 216 | | | | | | | |
| $e = 7$ | 49 | 343 | | | | | | | |
| $e = 8$ | 64 | 512 | | | | | | | |
| $e = 9$ | 81 | 729 | | | | | | | |
| $e = 10$ | 100 | 1000 | | | | | | | |
| $e = 11$ | 121 | | | | | | | | |
| $e = 12$ | 144 | | | | | | | | |
| $e = 13$ | 169 | | | | | | | | |
| $e = 14$ | 196 | | | | | | | | |
| $e = 15$ | 225 | | | | | | | | |
| $e = 16$ | 256 | | | | | | | | |
| $e = 17$ | 289 | | | | | | | | |
| $e = 18$ | 324 | | | | | | | | |
| $e = 19$ | 361 | | | | | | | | |
| $e = 20$ | 400 | | | | | | | | |
| $e = 21$ | 441 | | | | | | | | |
| $e = 22$ | 484 | | | | | | | | |
| $e = 23$ | 529 | | | | | | | | |
| $e = 24$ | 576 | | | | | | | | |
| $e = 25$ | 625 | | | | | | | | |

### Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die gemeinsame Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad \text{(M1)}$$

*Beweis:*

$$\begin{aligned}
a^p \cdot a^q &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{p \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{q \text{ Faktoren}} \quad \text{(Assoziativgesetz)} \\
&= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{p+q \text{ Faktoren}} = a^{p+q} \qquad \square
\end{aligned}$$

### Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponenten

Zwei Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man das Produkt der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

$$a^p \cdot b^p = (ab)^p \quad \text{(M2)}$$

*Beweis:*

$$\begin{aligned}
a^p \cdot b^p &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{p \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{p \text{ Faktoren}} \quad \text{(Assoziativgesetz)} \\
&= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{p \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{p \text{ Faktoren}} \quad \text{(Kommutativgesetz)} \\
&= \underbrace{a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot \ldots \cdot a \cdot b}_{p \text{ Faktoren}} \quad \text{(Assoziativgesetz)} \\
&= \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{p \text{ Faktoren}} = (a \cdot b)^p \qquad \square
\end{aligned}$$

### Division von Potenzen mit gleicher Basis

Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die gemeinsame Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert.

$$a^p : a^q = a^{p-q} \quad \text{(D1)}$$

*Beweis:*

$$\begin{aligned}
a^p : a^q &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{p \text{ Faktoren}} : \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{q \text{ Faktoren}} \quad \text{(Klammergesetze)} \\
&= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{p \text{ Dividenden}} : \underbrace{a : a : \ldots : a}_{q \text{ Divisoren}} \\
&= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{p-q \text{ Faktoren}} = a^{p-q} \qquad \square
\end{aligned}$$

### Division von Potenzen mit gleichem Exponenten

Zwei Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man den Quotienten der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

$$a^p : b^p = (a : b)^p \quad \text{(D2)}$$

*Beweis:*

$$\begin{aligned}
a^p : b^p &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{p \text{ Faktoren}} : \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{p \text{ Faktoren}} \quad \text{(Klammergesetze)}\\
&= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{p \text{ Dividenden}} : \underbrace{b : b : \ldots : b}_{p \text{ Divisoren}} \quad \text{(Kommutativgesetz)}\\
&= \underbrace{a : b \cdot a : b \cdot \ldots \cdot a : b}_{p \text{ Quotienten}} \quad \text{(Assoziativgesetz)}\\
&= \underbrace{(a : b) \cdot (a : b) \cdot \ldots \cdot (a : b)}_{p \text{ Faktoren}} = (a : b)^p \qquad \square
\end{aligned}$$

### Potenzieren von Potenzen

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert.

$$\left(a^p\right)^q = a^{pq} \quad \text{(P)}$$

*Beweis:*

$$\begin{aligned}
(a^p)^q &= \underbrace{\underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{p \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{p \text{ Faktoren}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{p \text{ Faktoren}}}_{q \text{ Produkte}} \quad \text{(Assoziativgesetz)}\\
&= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{p \cdot q \text{ Faktoren}} = a^{pq} \qquad \square
\end{aligned}$$

### Konvention (Vereinbarung)

Ohne Klammern wird eine mehrfache Potenz *von aussen nach innen* ausgewertet.

Beispiel: $a^{p^{q^r}} = a^{\left(p^{(q^r)}\right)}$

## 2 Potenzen mit rationalen Exponenten

### Definition

Die Definition

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}} \quad \text{für } a \in \mathbb{R}_0^+$$

erlaubt es, (höhere) Wurzeln als Potenzen mit rationalen (gebrochenen) Exponenten darzustellen und damit zu rechnen. Die oben genannten Potenzgesetze sind unter den jeweiligen Einschränkungen auch für rationale Exponenten gültig.

*Beachte:* $\sqrt{a}$ ist eine Abkürzung für $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

**Rechenregeln für Wurzeln (1)**

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16} = x \qquad ||\,^3$$

$$\left(\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}\right)^3 = x^3$$

$$\left(\sqrt[3]{4}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[3]{16}\right)^3 = x^3$$

$$4 \cdot 16 = x^3$$

$$x = \sqrt[3]{4 \cdot 16}$$

$$x = 4$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad \text{und} \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}}$$

**Rechenregeln für Wurzeln (2)**

$$\sqrt[4]{a^{20}} = a^x \qquad ||\,^4$$

$$\left(\sqrt[4]{a^{20}}\right)^4 = (a^x)^4$$

$$a^{20} = a^{4x}$$

$$4x = 20$$

$$x = 5$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a^p} = a^{p/n} \quad \text{falls } p \text{ durch } n \text{ teilbar ist}}$$

**Rechenregeln für Wurzeln (3)**

$$\sqrt[3]{a}^{\,5} = a^x \qquad ||\,^3$$

$$\left(\sqrt[3]{a}^{\,5}\right)^3 = \left(a^x\right)^3$$

$$\left(\sqrt[3]{a}^{\,3}\right)^5 = \left(a^x\right)^3$$

$$a^5 = \left(a^x\right)^3$$

$$\sqrt[3]{a^5} = a^x$$

$$\boxed{(\sqrt[n]{a}\,)^p = \sqrt[n]{a^p}}$$

## Rechenregeln für Wurzeln (4)

$$\sqrt[3]{\sqrt[7]{a}} = x \qquad ||^{3}$$

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt[7]{a}}\right)^{3} = x^{3}$$

$$\sqrt[7]{a} = x^{3} \qquad ||^{7}$$

$$\left(\sqrt[7]{a}\right)^{7} = (x^{3})^{7}$$

$$a = (x^{7})^{3}$$

$$\left(\sqrt[3]{a}\right) = x^{7}$$

$$\sqrt[7]{\sqrt[3]{a}} = x$$

$$\boxed{\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n\cdot p]{a}}$$

## Rechenregeln für Wurzeln (5)

$$\sqrt[35]{a^{14}} = x$$

$$\sqrt[5\cdot 7]{a^{14}} = x$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[7]{a^{14}}} = x$$

$$\sqrt[5]{a^{2}} = x$$

$$\boxed{\sqrt[p\cdot t]{a^{n\cdot t}} = \sqrt[p]{a^{n}}}$$

### Beispiel 1.1

$\sqrt{\sqrt[3]{625}} = \sqrt[3]{\sqrt{625}} = \sqrt[3]{25}$

### Beispiel 1.2

$\sqrt[3]{27^{4}} = \sqrt[3]{27}^{\,4} = 3^{4} = 81$

### Beispiel 1.3

$\sqrt[5]{12^{10}} = 12^{2} = 144$

### Beispiel 1.4

$\sqrt[4]{16^{3}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^{3} = 2^{3} = 8$

**Beispiel 1.5**

$$\left(\sqrt[7]{15}\right)^{14} = \sqrt[7]{15^{14}} = 15^2 = 225$$

**Beispiel 1.6**

$$\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{a}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3 \cdot a}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^4}} = \sqrt[3]{a}$$

**Beispiel 1.7**

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^3} &= \sqrt[15]{\left(a^2\right)^5} \cdot \sqrt[15]{\left(a^3\right)^3} = \sqrt[15]{a^{10} \cdot a^9} \\ &= \sqrt[15]{a^{19}} = \sqrt[15]{a^{15} \cdot a^4} = a\,\sqrt[15]{a^4}\end{aligned}$$

**Beispiel 1.8**

$$\sqrt[5]{a^3} \cdot \sqrt[5]{2a^4} \cdot \sqrt[5]{16a^2} = \sqrt[5]{a^3 \cdot 2a^4 \cdot 16a^3} = \sqrt[5]{32a^{10}} = 2a^2$$

**Beispiel 1.9**

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{x^7y^2} \cdot \sqrt[4]{x^{11}y^3} \cdot \sqrt[4]{x^2y^3} &= \sqrt[4]{x^7y^2 \cdot x^{11}y^3 \cdot x^2y^3} \\ &= \sqrt[4]{x^{20}y^8} = x^5y^2\end{aligned}$$

**Beispiel 1.10**

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{135u^{20}v^{11}} : \sqrt[3]{5u^5v^5} &= \sqrt[3]{135u^{20}v^{11} : (5u^5v^5)} \\ &= \sqrt[3]{27u^{15}v^6} = 3u^5v^2\end{aligned}$$

**Beispiel 1.11**

$$\sqrt[4]{\frac{81a^4}{625b^8}} = \frac{3a}{5b^2}$$

**Beispiel 1.12**

$$\sqrt[25]{a^{30}} + 2\,\sqrt[15]{a^{18}} - 3\,\sqrt[55]{a^{66}} = \sqrt[5]{a^6} + 2\sqrt[5]{a^6} - 3\sqrt[5]{a^6} = 0$$

**Beispiel 1.13**

$$\sqrt[3]{a^{11}} = \sqrt[3]{a^9 \cdot a^2} = \sqrt[3]{a^9} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^3 \cdot \sqrt[3]{a^2} \quad \text{(Normalform)}$$

**Beispiel 1.14**

$$\sqrt[5]{a^{-3}} = \sqrt[5]{\frac{1}{a^3}} = \sqrt[5]{\frac{a^2}{a^5}} = \frac{\sqrt[5]{a^2}}{a} \quad \text{(Normalform)}$$

**Beispiel 1.15**

$a^2\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{(a^2)^3}\cdot\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^6\cdot a^2} = \sqrt[3]{a^8}$

**Beispiel 1.16**

$$(a+b)\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{(a+b)^3}} = \sqrt[4]{(a+b)^4\cdot\frac{1}{(a+b)^3}} = \sqrt[4]{a+b}$$

**Beispiel 1.17**

$$\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}^2-\sqrt{5}^2} = \sqrt{6}+\sqrt{5}$$

**Beispiel 1.18**

$$\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \sqrt{a-b}$$

Wurzelgrössen schreibt man komfortabler als Potenzen mit gebrochenen Exponenenten.

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

Diese neue Schreibweise ist nur dann sinnvoll, wenn die bisherigen Potenzregeln auch für Potenzen mit gebrochenem Exponenten gelten.

Gilt $a^p\cdot a^q = a^{p+q}$?

$$a^p\cdot a^q = a^{\frac{r}{s}}\cdot a^{\frac{t}{u}} = \sqrt[s]{a^r}\cdot\sqrt[u]{a^t} = \sqrt[su]{a^{ru}}\cdot\sqrt[su]{a^{ts}} = \sqrt[su]{a^{ru}\cdot a^{ts}}$$

$$= \sqrt[su]{a^{ru+ts}} = a^{\frac{ru+ts}{su}} = a^{\frac{ru}{su}+\frac{ts}{su}} = a^{\frac{r}{s}+\frac{t}{u}} = a^{p+q}$$

Ja

Gilt $a^p\cdot b^p = (a\cdot b)^p$?

$$a^pb^p = a^{\frac{r}{s}}\,b^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r}\,\sqrt[s]{b^r} = \sqrt[s]{a^r\,b^r} = \sqrt[s]{(ab)^r} = (ab)^{\frac{r}{s}} = (ab)^p$$

Ja

Analog beweist man

- $a^p : a^q = a^{p-q}$
- $a^p : b^p = (a:b)^p$

für $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $p,\,q\in\mathbb{Q}$.

Gilt $\left(a^p\right)^q = a^{p\cdot q}$?

$$(a^p)^q = \left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{t}{u}} = \sqrt[u]{\left(\sqrt[s]{a^r}\right)^t} = \sqrt[u]{\left(\sqrt[s]{a}\right)^{rt}} = \left(\sqrt[u]{\sqrt[s]{a}}\right)^{rt}$$

$$= \left(\sqrt[su]{a}\right)^{rt} = a^{\frac{rt}{su}} = a^{\frac{r}{s}\cdot\frac{t}{u}} = q^{pq}$$

Ja

**Potenzen mit rationalen Exponenten**

- $\sqrt[q]{a} = a^{\frac{1}{q}}$ für $a \in \mathbb{R}_0^+$ und $q \in \mathbb{N}$
- $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$ für $a \in \mathbb{R}_0^+$ und $p,\, q \in \mathbb{N}$
- $\dfrac{1}{\sqrt[q]{a^p}} = a^{-\frac{p}{q}}$ für $a \in \mathbb{R}^+$ und $p,\, q \in \mathbb{N}$

Mit der Einschränkung $a,\, b \in \mathbb{R}^+$ gelten die Potenzgesetze auch für rationale Exponenten $p,\, q \in \mathbb{Q}$:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \qquad a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$$
$$a^p : a^q = a^{p-q} \qquad a^p : b^p = (a : b)^p$$
$$\left(a^p\right)^q = a^{pq}$$

**Beispiel 2.1**

$$1^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{1^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1}} = \frac{1}{1} = 1$$

**Beispiel 2.2**

$$4^{1.5} = \left(2^2\right)^{1.5} = 2^3 = 8$$

**Beispiel 2.3**

$$64^{\frac{1}{3}} = (2^6)^{\frac{1}{3}} = 2^2 = 4$$

**Beispiel 2.4**

$$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \left(\frac{2^4}{3^4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

**Beispiel 2.5**

$$36^{-0.25} = (6^2)^{-\frac{1}{4}} = 6^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6^{\frac{1}{2}}} = \frac{6^{\frac{1}{2}}}{6^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{1}{2}}} = \frac{6^{\frac{1}{2}}}{6} \quad \text{(Normalform)}$$

**Beispiel 2.6**

$$0.0016^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{16}{10000}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{2^4}{10^4}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{2}{10}\right)^{-1} = \left(\frac{10}{2}\right)^{1} = 5$$

**Beispiel 2.7**

$$\sqrt[6]{7^4} = 7^{\frac{4}{6}} = 7^{\frac{2}{3}}$$

**Beispiel 2.8**

$10^{\frac{1}{3}} \cdot 10^{\frac{1}{6}} = 10^{\frac{2}{6}+\frac{1}{6}} = 10^{\frac{3}{6}} = 10^{\frac{1}{2}}$

**Beispiel 2.9**

$\left(81^{\frac{1}{3}}\right) = 81^{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}} = 81^{\frac{1}{4}} = \left(3^4\right)^{\frac{1}{4}} = 3^{4\cdot\frac{1}{4}} = 3^1 = 3$

**Beispiel 2.10**

$0.5^{\frac{1}{7}} \cdot 256^{\frac{1}{7}} = (0.5 \cdot 256)^{\frac{1}{7}} = 128^{\frac{1}{7}} = \left(2^7\right)^{\frac{1}{7}} = 2^1 = 2$

**Beispiel 2.11**

$\left(c^8\right)^{\frac{2}{3}} : \left(c^2\right)^{\frac{2}{3}} = \left(c^8 : c^2\right)^{\frac{2}{3}} = \left(c^6\right)^{\frac{2}{3}} = c^{6\cdot\frac{2}{3}} = c^4$

**Beispiel 2.12**

$\sqrt{8} \cdot 2^{0.5} = (2^3)^{0.5} \cdot 2^{0.5} = 2^{1.5} \cdot 2^{0.5} = 2^2 = 4$

**Beispiel 2.13**

$9 : 9^{-1.5} = 9^1 : 9^{-1.5} = 9^{1-(-1.5)} = 9^2 = 81$

**Beispiel 2.14**

$(2^{-2})^{-1.5} = 2^3 = 8$

**Beispiel 2.15**

$5^{-0.5} \cdot 20^{-0.5} = (5 \cdot 20)^{-0.5} = 100^{-0.5} = (10^2)^{-0.5} = 10^{-1} = \frac{1}{10}$

**Beispiel 2.16**

$\sqrt{2\sqrt[3]{4}} = \left(2 \cdot 4^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^1 \cdot 2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{3}{3}+\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{6}}$

**Beispiel 2.17**

$128^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{1}{3}} = (128 : 2)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3}} = (4^3)^{\frac{1}{3}} = 4$

**Beispiel 2.18**

$a^{\frac{3}{4}} : \left(a^{\frac{2}{3}} : a\right) = a^{\frac{3}{4}} : \left(a^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}}\right) = a^{\frac{3}{4}} : a^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{9}{12}-(-\frac{4}{12})} = a^{\frac{13}{12}}$

**Beispiel 2.19**

$$\left(3 \cdot 32^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 108^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot 256^{\frac{1}{3}}\right) \cdot 2^{\frac{1}{3}}$$

$$= 3 \cdot 32^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 108^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot 256^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$$

$$= 3 \cdot (32 \cdot 2)^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot (18 \cdot 2)^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot (256 \cdot 2)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 3 \cdot (2^6)^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot (6^3)^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot (2^9)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 6^1 - 4 \cdot 2^3 = 12 + 18 - 32 = -2$$

**Beispiel 2.20**

$$\begin{aligned}(2n)^{0.25} \cdot (8n^2)^{0.25} \cdot n^{1.25} &= \left(2n \cdot 8n^2\right)^{0.25} \cdot (n^5)^{0.25} \\ &= (16n^3 \cdot n^5)^{0.25} = (2^4 n^8)^{0.25} = 2n^2\end{aligned}$$

**Beispiel 2.21**

$$\left[ab^2 \cdot (a^3 b)^{\frac{1}{5}} - (ab^2)^{\frac{1}{5}} \cdot a^3 b\right] : (ab)^{\frac{7}{5}}$$

$$= \left[a \cdot b^2 \cdot a^{\frac{3}{5}} \cdot b^{\frac{1}{5}} - a^{\frac{1}{5}} \cdot b^{\frac{2}{5}} \cdot a^3 \cdot b\right] : (ab)^{\frac{7}{5}}$$

$$= \left[a^{\frac{8}{5}} \cdot b^{\frac{11}{5}} - a^{\frac{16}{5}} \cdot b^{\frac{7}{5}}\right] : \left(a^{\frac{7}{5}} \cdot b^{\frac{7}{5}}\right)$$

$$= \left(a^{\frac{8}{5}} \cdot b^{\frac{11}{5}}\right) : \left(a^{\frac{7}{5}} \cdot b^{\frac{7}{5}}\right) - \left(a^{\frac{16}{5}} \cdot b^{\frac{7}{5}}\right) : \left(a^{\frac{7}{5}} \cdot b^{\frac{7}{5}}\right)$$

$$= a^{\frac{8}{5}} \cdot b^{\frac{11}{5}} : a^{\frac{7}{5}} : b^{\frac{7}{5}} - a^{\frac{16}{5}} \cdot b^{\frac{7}{5}} : a^{\frac{7}{5}} : b^{\frac{7}{5}}$$

$$= a^{\frac{1}{5}} \cdot b^{\frac{4}{5}} - a^{\frac{9}{5}}$$

**Beispiel 2.22**

$$16^{\frac{1}{4}} + 8^{\frac{4}{3}} + 36^{\frac{3}{2}} - 125^{\frac{2}{3}} - 27^{\frac{4}{3}}$$

$$= (2^4)^{\frac{1}{4}} + (2^3)^{\frac{4}{3}} + (6^2)^{\frac{3}{2}} + (5^3)^{\frac{2}{3}} + (3^3)^{\frac{4}{3}}$$

$$= 2^1 + 2^4 + 6^3 + 5^2 + 3^4$$

$$= 2 + 16 + 216 - 25 - 81 = 126$$

**Beispiel 2.23**

$\left(16^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot 128^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 250^{\frac{1}{3}}\right) : 2^{\frac{1}{3}}$

$= 16^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot 128^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 250^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{1}{3}}$

$= (16 : 2)^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot (128 : 2)^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot (250 : 2)^{\frac{1}{3}}$

$= 8^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot 64^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 125^{\frac{1}{3}}$

$= (2^3)^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot (4^3)^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot (5^3)^{\frac{1}{3}}$

$= 2^1 - 4 \cdot 4^1 + 3 \cdot 5^1 = 2 - 16 + 15 = 1$

**Beispiel 2.24**

$\pi^{100} < 9^{50}$ Wahr oder falsch? (mit Begründung)

$\pi^{100} < (3^2)^{50}$

$\pi^{100} < 3^{100}$

falsch, da $\pi = 3.14159\ldots > 3$

**Beispiel 2.25**

$5^{1.5} < 11$ Wahr oder falsch? (mit Begründung)

$(5^{1.5})^2 < 11^2$

$5^3 < 11^2$

$125 < 131$

falsch

**Beispiel 2.26**

Welche Zahl ist grösser? $4^{\frac{1}{4}}$ oder $5^{\frac{1}{5}}$? (mit Begründung)

$4^{\frac{1}{4}} \lesseqqgtr 5^{\frac{1}{5}} \qquad \| \quad {}^{20}$

$(4^{\frac{1}{4}})^{20} \lesseqqgtr (5^{\frac{1}{5}})^{20}$

$4^5 \lesseqqgtr 5^4$

$1024 \lesseqqgtr 625$

Also ist $4^{\frac{1}{4}} > 5^{\frac{1}{5}}$.

**Beispiel 2.27**

Löse in $\mathbb{Q}$: $3^x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$3^x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$3^x = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}$$

$$3^x = 3^{-\frac{1}{2}}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

**Beispiel 2.28**

Löse in $\mathbb{Q}$: $25^{100} = 125^x$

$$\begin{aligned} (5^2)^{100} &= (5^3)^x \\ 5^{200} &= 5^{3x} \\ 200 &= 3x \\ x &= \frac{200}{3} \end{aligned}$$

**Beispiel 2.29**

Löse in $\mathbb{Q}$: $x^4 = -16$

nicht lösbar

**Beispiel 2.30**

Löse in $\mathbb{Q}$: $x^{-4} = 16$

$$x^{-4} = 2^4$$

$$x^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$x = \pm\frac{1}{2} \quad (!)$$

**Beispiel 2.31**

Löse in $\mathbb{Q}$: $5^{x+2} \cdot 25^{-x} = 625$

$$\begin{aligned} 5^{x+2} \cdot 5^{-2x} &= 5^4 \\ 5^{x+2-2x} &= 5^4 \\ x + 2 - 2x &= 4 \\ -x &= 2 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

**Beispiel 2.32**

Löse in $\mathbb{Q}$: $9^{2x} + 3 = 4 \cdot 9^x$

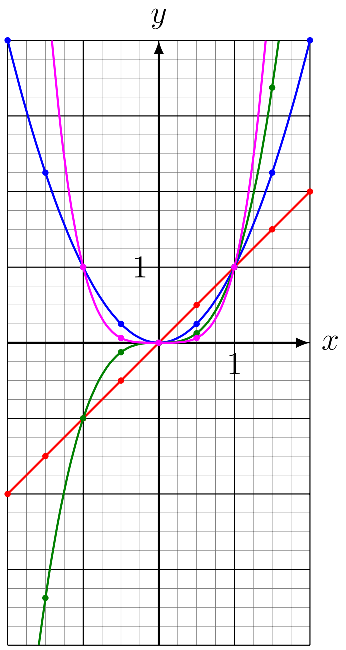
$$\begin{aligned} (9^x)^2 + 3 &= 4 \cdot 9^x \quad \text{Substitution: } 9^x \overset{*}{=} a \\ a^2 + 3 &= 4a \\ a^2 - 4a + 3 &= 0 \\ (a-1)(a-3) &= 0 \\ a_1 &= 1 \overset{*}{=} 9^x \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \\ a_2 &= 3 \overset{*}{=} 9^x \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

# 3 Potenzfunktionen

## Potenzfunktionen mit positiven ganzen Exponenten

$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad$ (Potenzfunktion vom Grad $n$)

| $x$ | $-2$ | $-\frac{3}{2}$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $\frac{3}{2}$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = x$ | $-2$ | $-\frac{3}{2}$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $2$ |
| $y = x^2$ | $4$ | $\frac{9}{4}$ | $1$ | $\frac{1}{4}$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ | $1$ | $\frac{9}{4}$ | $4$ |
| $y = x^3$ | $-8$ | $-\frac{27}{8}$ | $-1$ | $-\frac{1}{8}$ | $0$ | $\frac{1}{8}$ | $1$ | $\frac{27}{8}$ | $8$ |
| $y = x^4$ | $16$ | $\frac{81}{16}$ | $1$ | $\frac{1}{16}$ | $0$ | $\frac{1}{16}$ | $1$ | $\frac{81}{16}$ | $8$ |



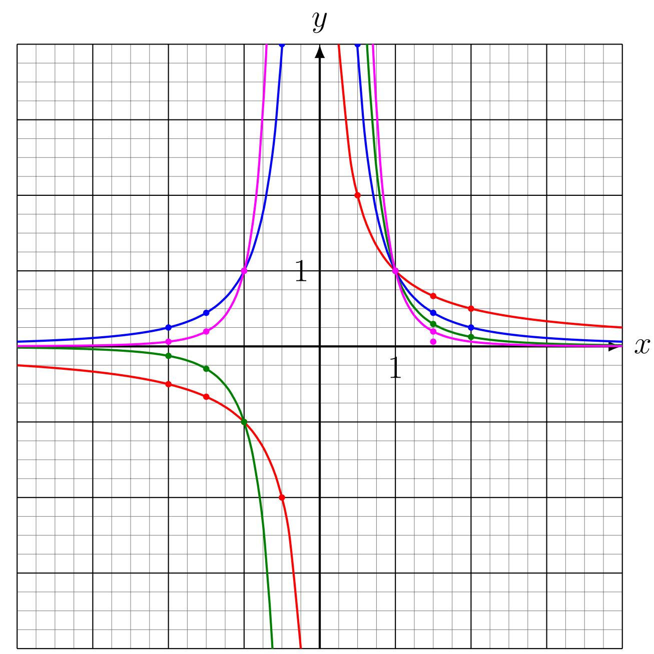

## Eigenschaften von $y^n$

| | $n$ gerade | $n$ ungerade |
|---|---|---|
| Definitionsbereich | $D = \mathbb{R}$ | $D = \mathbb{R}$ |
| Wertebereich | $W = \mathbb{R}$ | $W = \mathbb{R}_0^+$ |
| Symmetrie | $y$-Achse | zum Ursprung |
| Monotonie | monoton zunehmend | nicht monoton |

### Potenzfunktionen mit negativen ganzen Exponenten

$f(x) = x^{-n} = 1/x^n \quad (n \in \mathbb{N})$

| $x$ | $-2$ | $-\frac{3}{2}$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $\frac{3}{2}$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = x^{-1}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{2}{3}$ | $-1$ | $-2$ | – | $2$ | $1$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $y = x^{-2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{4}{9}$ | $1$ | $4$ | – | $4$ | $1$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $y = x^{-3}$ | $-\frac{1}{8}$ | $-\frac{27}{8}$ | $-1$ | $-8$ | – | $8$ | $1$ | $\frac{27}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |
| $y = x^{-4}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{81}{16}$ | $1$ | $16$ | – | $16$ | $1$ | $\frac{81}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |




### Eigenschaften von $y^{-n}$

| | $n$ gerade | $n$ ungerade |
|---|---|---|
| Definitionsbereich | $D = \mathbb{R}$ | $D = \mathbb{R}$ |
| Wertebereich | $W = \mathbb{R}$ | $W = \mathbb{R}_0^+$ |
| Symmetrie | $y$-Achse | zum Ursprung |
| Monotonie | monoton zunehmend | nicht monoton |

### Die Umkehrfunktionen zu den Potenzfunktionen

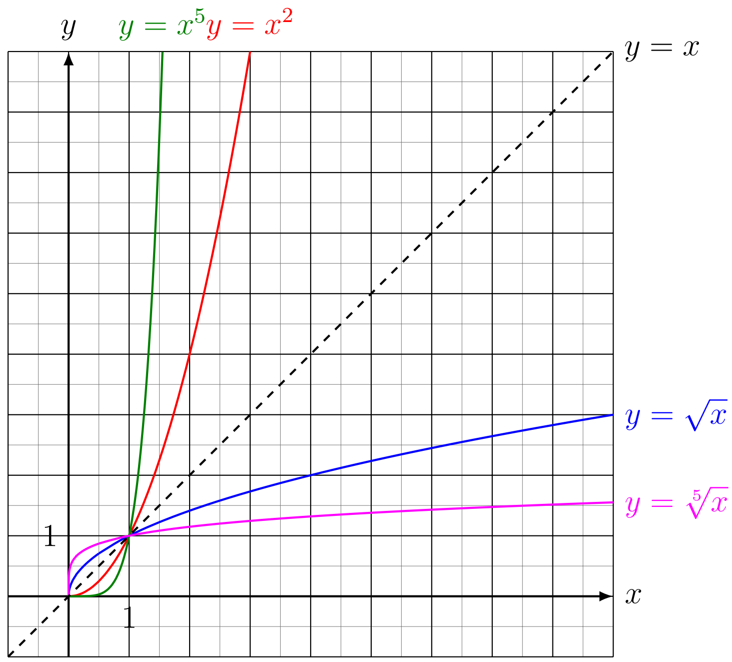
$y = x^n$

1. Die Rollen von $x$ und $y$ vertauschen:

$$x = y^n$$

2. Die neue Funktionsgleichung nach $y$ auflösen:

$$x^{\frac{1}{n}} = \left(y^n\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$x^{\frac{1}{n}} = y$$
$$y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$




### Der Graph der Umkehrfunktion

Der Graph der Umkehrfunktion kann durch Spiegeln des Graphen der Funktion $f$ an der Winkelhalbierenden $y = x$ gewonnen werden.

Erlaubt der gespiegelte Graph keine eineindeutige Zuordnung, so beschränkt man sich auf den Teil der oberhalb der $x$-Achse liegt.