Logarithmen

Theorie

1 Der Logarithmusbegriff

Das Logarithmieren ist neben dem Radizieren die zweite Umkehrung des Potenzierens:

$$\log_2 8 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2^3 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{8} = 2$$

Allgemein:

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b \text{ für } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\, b \in \mathbb{R}^+$$

Der Logarithmus von b zur Basis a ist der Exponent, mit dem man a potenzieren muss, um b zu erhalten.

Wenn es schwieriger wird:
$$\begin{aligned} \log_{100} 1000 &= x \\ 100^x &= 1000 \\ 10^{2x} &= 10^3 \\ 2x &= 3 \\ x &= 1.5 \end{aligned}$$

2 Logarithmengesetze

Gegeben:
$$\begin{aligned} x &= \log_a b \quad &\Leftrightarrow \quad b = a^x \\ y &= \log_a c \quad &\Leftrightarrow \quad c = a^y \end{aligned}$$

(M) $b \cdot c = a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad || \log_a$

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a a^{x+y} = x + y = \log_a b + \log_a c$$

(D) $b : c = a^x : a^y = a^{x-y} \quad || \log_a$

$$\log_a(b : c) = \log_a a^{x-y} = x - y = \log_a b - \log_a c$$

(P) $b^r = \left(a^x\right)^r = a^{rx} \quad || \log_a$

$$\log_a \left(b^r\right) = \log_a a^{rx} = rx = r \log_a b$$

Zusammenfassung:
$$\boxed{\begin{aligned} \log_a(b \cdot c) &= \log_a b + \log_a c \\ \log_a(b : c) &= \log_a b - \log_a c \\ \log_a b^r &= r \cdot \log_a b \end{aligned}}$$

3 Logarithmensysteme

Alle Logarithmen zu einer bestimmten Basis bilden ein *Logarithmensystem*.

$\log_{10} x = \lg x$: Zehnerlogarithmus (dekadischer Logarithmus)
$\log_2 x = \operatorname{lb} x$: Zweierlogarithmus (binärer Logarithmus)
$\log_e x = \ln x$: natürlicher Logarithmus (Basis $e = 2.7182\ldots$)

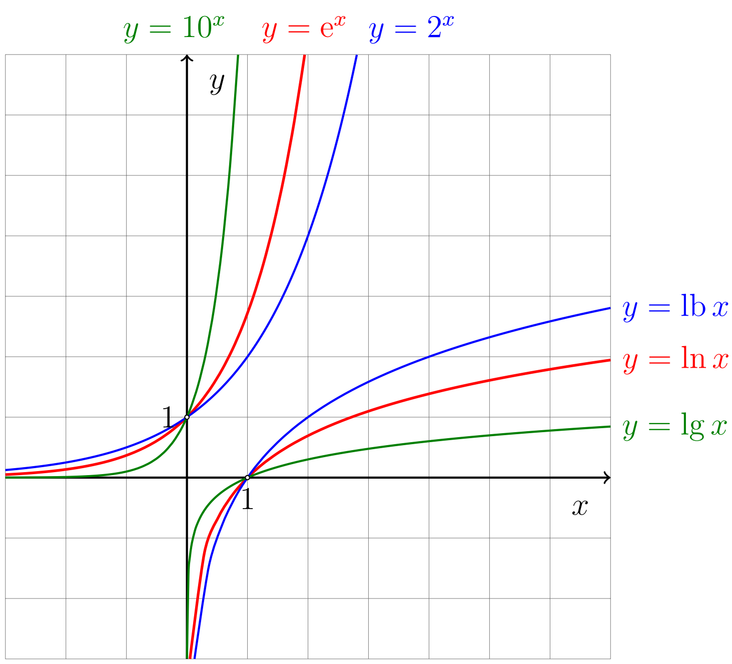
Basiswechsel

$$\log_5 7 = x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 5^x &= 7 \quad \| \log_{10} \\ \log_{10} 5^x &= \log_{10} 7 \\ x \cdot \log_{10} 5 &= \log_{10} 7 \\ x &= \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 5} \approx 1.20906 \end{aligned}$$

Allgemein: $\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$

4 Die Logarithmusfunktion

Skizziere die Graphen der Funktionen $y = \log_2 x$, $y = \ln x$ und $y = \lg x$ ins gleiche Koordinatensystem.



Eigenschaften

- $y = a^x$ ist die Umkehrfunktion von $y = \log_a x$.
- $D = \mathbb{R}^+$
- $W = \mathbb{R}$
- $(1, 0)$ liegt auf allen Graphen $y = \log_a x$.
- Der Graph von $y = \log_a x$ ist monoton steigend:

  $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad \log_a x_1 < \log_a x_2$.
- Die negative y-Achse ist Asymptote des Graphen von $y = \log_a x$.

5 Logarithmus- und Exponentialgleichungen

In einer Exponentialgleichung kommt die Variable mindestens einmal im Exponent vor.

Beispiel 5.1

$$\begin{aligned}
2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^x &= 9 && \text{Potenzgesetze anwenden}\\
2^x \cdot 2^2 - 2^x \cdot 2 + 2^x &= 9 && 2^x \text{ ausklammern}\\
2^x(4 - 2 + 1) &= 9 && \text{Zwischenresultate berechnen}\\
3 \cdot 2^x &= 9 && \text{Gleichung vereinfachen}\\
2^x &= 3 && \text{Gleichung logarithmieren}\\
\lg 2^x &= \lg 3 && \text{Logarithmengesetze}\\
x \lg 2 &= \lg 3 && \text{Gleichung nach } x \text{ auflösen}\\
x &= \frac{\lg 3}{\lg 2} \approx 1.585
\end{aligned}$$

Beispiel 5.2

$$25^x + 3 \cdot 5^{x-1} + 2 \cdot 5^{-2} = 0$$

$$\begin{aligned}
5^{2x} + 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot 5^x + \frac{2}{25} &= 0 \quad || \cdot 25 \\
25 \cdot 5^{2x} + 15 \cdot 5^x + 2 &= 0 \\
25\left(5^x\right)^2 + 15 \cdot 5^x + 2 &= 0 \quad \text{Substitution: } 5^x = a \\
25a^2 + 15a + 2 &= 0 \\
(5a+2)(5a+1) &= 0
\end{aligned}$$

$$a_1 = -0.4 = 5^x \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung}$$

$$a_2 = -0.2 = 5^x \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung}$$

$$L = \{\,\}$$

In einer Logarithmusgleichung kommt die Variable mindestens einmal im Numerus vor.

Beispiel 5.3

$$\begin{aligned}
\lg(x+1) - 2\lg x &= \lg 6 \qquad D = (0, \infty) \\
\lg(x+1) - \lg x^2 &= \lg 6 \\
\lg \frac{x+1}{x^2} &= \lg 6 \\
\frac{x+1}{x^2} &= 6 \\
x + 1 &= 6x^2 \\
1 + x - 6x^2 &= 0 \\
(1-2x)(1+3x) &= 0 \\
x_1 &= \tfrac{1}{2} \\
x_2 &= \tfrac{1}{3} \qquad L = \left\{\tfrac{1}{2}\right\}
\end{aligned}$$

Beispiel 5.4

$$\begin{aligned}
2(\lg x)^2 - 5\lg x - 3 &= 0 \qquad D = (0, \infty) \\
2a^2 - 5a - 3 &= 0 \qquad \text{Substitution: } \lg x = a \\
(2a+1)(a-3) &= 0
\end{aligned}$$

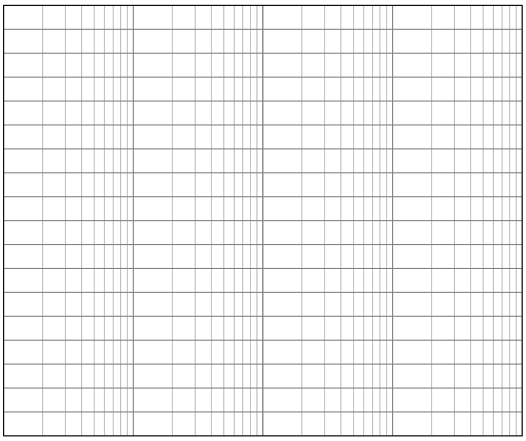
$$a_1 = -\tfrac{1}{2} = \lg x_1 \qquad x_1 = 10^{-\frac{1}{2}}$$

$$a_2 = 3 = \lg x_2 \qquad x_2 = 1000$$

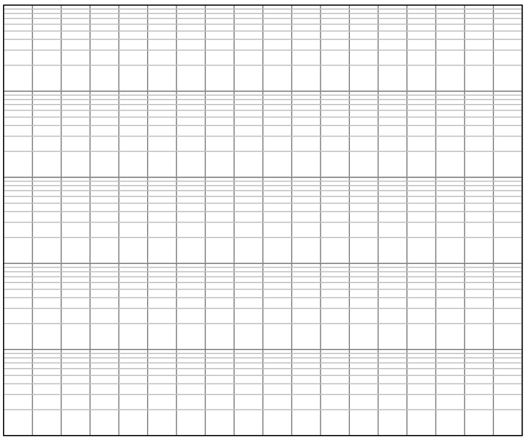
$$L = \left\{\tfrac{1}{\sqrt{10}},\ 1000\right\}$$

6 Logarithmenpapiere

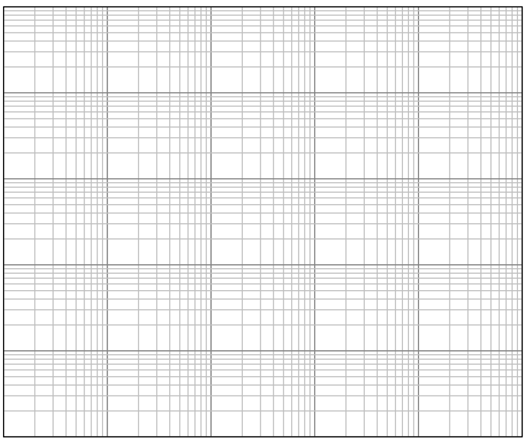
abzissenlogarithmische Skala



ordinatenlogarithmische Skala



doppellogarithmische Skala

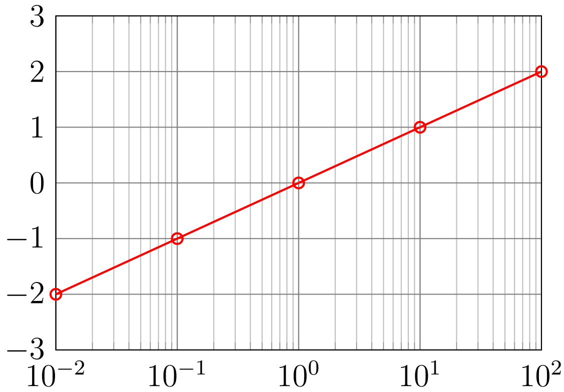


Eigenschaften

- Durch die breitesten Linien wird das Logarithmuspapier in *Dekaden* eingeteilt.
- Durch geegignete Beschriftung kann das Logarithmuspapier an eine beliebige Basis angepasst werden.
- Man kann die Logarithmusskala bei einer beliebigen (meist ganzzahligen) Potenz der gewählte Basis beginnen lassen. Aber nie bei Null!
- Verdoppelung des Abstandes von der Startlinie bedeutet Multiplikation des Wertes mit der gewählten Basis usw.

Beispiel 6.1

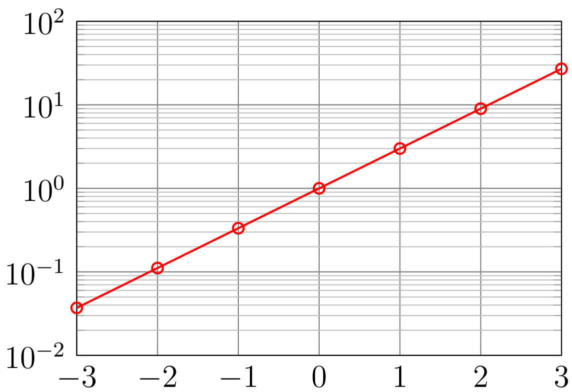
Skizziere $y = \log_{10} x$ in das abszissenlogarithmische Koordinatensystem.



In einem abszissenlogarithmischen Koordinatensystem erscheint eine Logarithmusfunktion als Gerade.

Beispiel 6.2

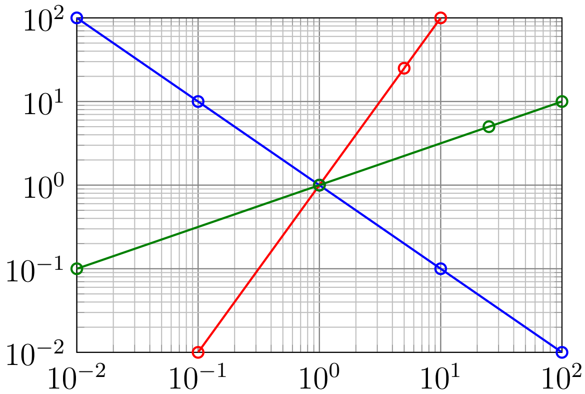
Skizziere $y = 3^x$ in das ordinatenlogarithmische Koordinatensystem.



In einem ordinatenlogarithmischen Koordinatensystem erscheint der Graph einer Exponentialfunktion als Gerade.

Beispiel 6.3

Skizziere $y = x^2$, $y = x^{-1}$ und $y = \sqrt{x}$ für $x > 0$ in das doppelllogarithmische Koordinatensystem.



In einem doppelt-logarithmischen Koordinatensystem erscheint der Graph einer Potenzfunktion als Gerade.

7 Berechnung von Logarithmen

Taylorreihe des natürlichen Logarithmus

Die Werte des natürlichen Logarithmus lassen sich für $-1 < x \leq 1$ durch folgende Potenzreihe approximieren (annähern):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad (-1 < x \leq 1)$$

Das Verfahren eignet sich in dieser Form nur bedingt für die Berechnung von Logarithmen.

Beispiel 7.1

$$\begin{aligned}\ln 2 = \ln(1+1) &\approx 1 - \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4} \\ &= 0.58333 \quad (\text{TR: } 0.6931)\end{aligned}$$

Beispiel 7.2

$$\begin{aligned}\ln 1.1 = \ln(1+0.1) &\approx 0.1 - \frac{0.1^2}{2} + \frac{0.1^3}{3} - \frac{0.1^4}{4} \\ &= 0.09531 \quad (\text{TR: } 0.09531)\end{aligned}$$

Beispiel 7.3

$$\begin{aligned}\ln 0.5 = \ln(1-0.5) &\approx 0.1 - \frac{(-0.5)^2}{2} + \frac{(-0.5)^3}{3} - \frac{(-0.5)^4}{4} \\ &= -0.6823 \quad (\text{TR: } -0.6931)\end{aligned}$$

Beispiel 7.4

$$\begin{aligned}\ln 10 &= \ln\left(\mathrm{e}\cdot\frac{10}{\mathrm{e}}\right) = \ln \mathrm{e} + \ln 3.67879 = 1 + \ln\left(\mathrm{e}\cdot\frac{3.67879}{\mathrm{e}}\right)\\ &= 2 + \ln 1.35335 = \ln(1 + 0.35335)\\ &= 2 + 0.35335 - \frac{0.35335^2}{2} + \frac{0.35335^3}{3} - \frac{0.35335^4}{4}\\ &= 2 + 0.3017 = 2.3017 \quad (\text{TR: } 2.3025)\end{aligned}$$