Das Lösen linearer Gleichungssysteme

Lineare Gleichungen

Die Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

ist eine *lineare Gleichung* in den n Variablen x_1, x_2, …, x_n.

Die Zahlen a_1, a_2, …, a_n werden *Koeffizienten* genannt

Beispiele

- $3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 9$
- $2a - 5b - 4c = -7$

Eine lineare Gleichung darf keine Produkte, Quotienten, Potenzen oder andere nichtlineare Funktionen ihrer Variablen enthalten. Die folgenden Gleichungen sind *nicht* linear:

- $5x_1x_2 + 3x_3 = 4$
- $4x_1^2 + 3x_2^2 = 8$
- $1/x_1 + 1/x_2 = -3$
- $4\sin(x_1) + 3\cos(x_2) - 2\tan(x_3) = 0$

Lösungen

Eine *Lösung* der linearen Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ besteht aus den Zahlen s_1, s_2, …, s_n mit der Eigenschaft, dass die Gleichung durch

$$x_1 = s_1,\ x_2 = s_2,\ \ldots, x_n = s_n$$

erfüllt wird.

Beispiel

Die lineare Gleichung $2x_1 - x_2 = 4$ hat z. B. die Lösungen

- $x_1 = 3$, $x_2 = 2$
- $x_1 = 1$, $x_2 = -2$
- …

wie man durch Einsetzen leicht überprüfen kann.

Lösungsmenge

Die Gesamtheit aller Lösungen heisst *Lösungsmenge* der Gleichung.

Beispiel

Ersetzt man in der Gleichung $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$ die Variablen x_1 und x_2 durch zwei beliebige Zahlen s_1 und s_2, so lässt sich die Gleichung nach der letzten Variablen x_3 auflösen:

$$\begin{aligned} 3s_1 - 2s_2 + x_3 &= 5 \\ x_3 &= 5 - 3s_1 + 2s_2 \end{aligned}$$

Dadurch ist die Lösungsmenge eindeutig bestimmt:

$L = \{(s_1, s_2, 5 - 3s_1 + 2s_2) \colon s_1 \in \mathbb{R}, s_2 \in \mathbb{R}\}$

Lineares Gleichungssystem

Eine endliche Menge linearer Gleichungen in den Variablen x_1, x_2, ..., x_n heisst *lineares Gleichungssystem* (LGS). Formal:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ \ldots &= \ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

- Der erste Index (1, 2, ..., m) bezeichnet die Nummer der Gleichung bzw. der Konstanten rechts.
- Der zweite Index (1, 2, ..., n) bezeichnet die Nummer des Koeffizienten bzw. der Variablen.

Beispiele

- $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 2 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= 3 \\ -2x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

  (3 Gleichungen mit 3 Unbekannten)

- $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 &= -1 \end{aligned}$$

  (2 Gleichungen mit 4 Unbekannten)

Ein LGS muss nicht gleich viele Gleichungen wie Variablen haben.

Lösung eines LGS

Eine *Lösung* des obigen LGS besteht aus den Zahlen s_1, s_2, $\ldots$, s_n mit der Eigeschaft, dass *alle* Gleichungen durch $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, $\ldots$, $x_n = s_n$ erfüllt werden.

Beispiel

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 2 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= 3 \\ -2x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen kontrolliert man, dass $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$ Lösungen des obigen LGS sind.

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 4 \cdot 1 &= 2 \\ 2 + 5 \cdot 0 + 1 &= 3 \\ -2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 &= 4 \end{aligned}$$

Aquivalenzumformungen

Eine Äquivalenzumformung ist eine Umformung, welche die Lösungsmenge einer Gleichung nicht verändert.

Zur Lösung eines LGS genügen die folgenden drei Typen von Äquivalenzumformungen:

- Das Vertauschen von zwei Gleichungen,
- Das Multiplizieren einer Gleichung mit einer Zahl, die verschieden von Null ist,
- Das Addieren eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen.

Beispiele

Vertauscht man im LGS

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 2 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= 3 \\ -2x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

z. B. die erste und zweite Zeile, so erhält man

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 2 \\ -2x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge $L = \{(2, 0, 1)\}$ bleibt natürlich unverändert.

Multipliziert man im LGS

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 2 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= 3 \\ -2x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

die zweite Zeile z. B. mit 5, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 2 \\
5x_1 + 25x_2 + 5x_3 &= 15 \\
-2x_2 + 4x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

Die neue zweite Zeile hat immer noch die Lösung $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$.

Multipliziert man im LGS

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 2 \\
x_1 + 5x_2 + x_3 &= 3 \\
-2x_2 + 4x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

die erste Zeile z. B. mit 3 und addiert das Ergebnis zur dritten Zeile, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 2 \\
x_1 + 5x_2 + x_3 &= 3 \\
9x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= 10
\end{aligned}
$$

Die neue dritte Zeile hat immer noch die Lösung $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$.

Die Koeffizientenmatrix eines LGS

Das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\
\ldots &= \ldots \\
a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

kann als *Koeffizientenmatrix* vereinfacht dargestellt werden:

$$
\begin{array}{ccccc}
a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & b_1 \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & b_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} & b_m
\end{array}
$$

Eine *Matrix* ist ein rechteckiges Zahlenschema.

Beispiel

Das LGS

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 2 \\
x_1 + 5x_2 + x_3 &= 3 \\
-2x_2 + 4x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

hat die Koeffizientenmatrix

$$
\begin{array}{cccc}
3 & 2 & -4 & 2 \\
1 & 5 & 1 & 3 \\
0 & -2 & 4 & 4
\end{array}
$$

- Für fehlende Koeffizienten schreibt man eine Null.
- Subtraktionen stellt man durch negative Koeffizienten dar.

Der Gauss-Algorithmus

(1) Gehe von links her zur erste Kolonne, die nicht nur aus Nullen besteht. Sorge durch eine Zeilenvertauschung und/oder eine Zeilenmultiplikation dafür, dass in der 1. Zeile eine 1 steht (Pivot-Element).

(2) Addiere Vielfache der ersten Zeile zu den darunter liegenden Zeilen, so dass alle Elemente unter dem Pivot-Element null werden.

(3) Streiche in Gedanken die erste Zeile und dann die die links darunter stehenden Kolonnen die nur Nullelemente enthalten. Wiederhole mit dem Rest der Matrix die Schritte (2) und (3) so lange, bis du am unteren oder am rechten Rand der Matrix angekommen bist.

Die Koeffizientenmatrix hat dann *Zeilenstufenform*.

Beispiel

- Koeffizentenmatrix des ursprünglichen LGS:

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \end{array}$$

- Vertausche die erste und zweite Zeile:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \end{array}$$

- Addiere das (-3)-fache der ersten Zeile zur zweiten:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & -13 & -7 & -7 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \end{array}$$

- Vertausche die zweite und dritte Zeile:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & -13 & -7 & -7 \end{array}$$

- Multipliziere die zweite Zeile mit $-1/2$:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -13 & -7 & -7 \end{array}$$

- Addiere das -13-fache der zweiten zur dritten Zeile:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -33 & -33 \end{array}$$

- Multipliziere die dritte Zeile mit $-1/33$:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{Zeilenstufenform}$$

Der Gauss-Jordan-Algorithmus

(1) Führe, wie oben beschrieben, den Gauss-Algorithmus durch.

(2) Gehe in der untersten Zeile, die nicht nur aus Nullen besteht, von links her zur erste Kolonne mit einer 1 (Pivot-Element).

(3) Addiere Vielfache dieser Zeile zu den darüber liegenden Zeilen, so dass alle Elemente über dem Pivot-Element null werden.

(4) Streiche in Gedanken die aktuelle Zeile. Wiederhole mit dem darüber liegenden Rest der Matrix die Schritte (2) und (3) so lange, bis du am oberen oder am linken Rand der Matrix angekommen bist.

Die Koeffizientenmatrix hat dann *reduzierte Zeilenstufenform*.

Beispiel (fortgesetzt)

- Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

- Addiere das 2-fache der dritten Zeile zur zweiten Zeile und das (-1)-fache der dritten Zeile zur ersten Zeile:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

- Addiere das (-5)-fache der zweiten Zeile zur ersten Zeile:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \text{reduzierte Zeilenstufenform}$$

Rücktransformation

Stellt man die Zeilenstufenform einer Koeffizientenmatrix wieder als Gleichungssystem dar, lässt sich die Lösung direkt ablesen.

Im Beispiel:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{array}$$

Spezialfall: keine Lösung

LGS hat nach dem Gauss-Jordan-Algorithmus:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

An der untersten Gleichung erkennt man, dass das LGS *nicht erfüllbar* ist und daher *keine Lösung* hat.

$L = \{\}$

Spezialfall: unendlich viele Lösungen

LGS nach dem Gauss-Jordan-Algorithmus:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 4x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 1 - 4x_3 \\ x_2 &= 2 + x_3 \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass für x_3 eine beliebige reelle Zahl gewählt werden kann. Das Gleichungssystem hat also *unendlich viele Lösungen*:

$L = \{(1 - 4x_1, 2 + x_3) \colon x_3 \in \mathbb{R}\}$