Aufgabe

Stelle das Gleichungssystem als Matrix dar und löse es mit dem Gauss-Jordan-Algorithmus.

$$\begin{aligned} 2x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 10x_2 - 30x_3 + 10x_4 &= 20 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Lösung

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -30 & 10 & 20 \\ 2 & 4 & -3 & 1 & 2 \end{array}$$

Vertausche in der Koeffizientenmatrix die Zeilen 1 und 2, damit ein geeignetes Pivot-Element (1) oben links steht.

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & \cdot(-2) \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & \\ 0 & 10 & -30 & 10 & 20 & \\ 2 & 4 & -3 & 1 & 2 & + \end{array}$$

Addiere, sofern nötig, geeignete Vielfache der Pivot-Zeile zu den darunter liegenden Zeilen, bis alle Zahlen unter dem Pivot-Element null sind.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 10 & -30 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}$$

Vertausche die Zeilen 2 und 3, damit ein geeigneter Pivot-Kandidat (10) in der zweiten Zeile steht.

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & \\ 0 & 10 & -30 & 10 & 20 & \cdot\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & \end{array}$$

Multipliziere die 2. Zeile mit $\frac{1}{10}$, damit an der Pivot-Position eine 1 steht.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}$$

Vertausche die Zeilen 3 und 4, damit ein geeigneter Pivot-Kandidat (-1) in der 3. Zeile steht. (Man hätte auch die 3. Zeile mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren und damit weiter unten einen Schritt sparen können.)

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 2 & \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & \cdot(-1) \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & \end{array}$$

Multipliziere die dritte Zeile mit -1, damit an der Pivot-Position eine 1 steht.

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 2 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & \cdot(-2) \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & + \end{array}$$

Sorge dafür, dass unter dem Pivot-Element in der 3. Zeile eine Null steht.

$$
\begin{array}{ccccc|c}
\boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 & \\
0 & \boxed{1} & -3 & 1 & 2 & \\
0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & \\
0 & 0 & 0 & 2 & 6 & \cdot \frac{1}{2}
\end{array}
$$

Mache das letzte Pivot-Element zu 1. Damit ist die Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform (*row echelon form*) und der Gauss-Teil ist fertig. Es folgen nun die Jordan-Schritte.

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
\boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 & & & + \\
0 & \boxed{1} & -3 & 1 & 2 & & + & \\
0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & + & & \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & \cdot(-1) & \cdot(-1) & \cdot(-1)
\end{array}
$$

Sorge dafür, dass alle Zahlen über dem Pivot-Element in der 4. Zeile null sind.

$$
\begin{array}{ccccc|cc}
1 & 2 & -1 & 0 & -3 & & + \\
0 & 1 & -3 & 0 & -1 & + & \\
0 & 0 & 1 & 0 & -5 & \cdot 3 & \cdot 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 3 & &
\end{array}
$$

Sorge dafür, dass alle Zahlen über dem Pivot-Element in der 3. Zeile null sind.

$$
\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 0 & 0 & -8 & + \\
0 & 1 & 0 & 0 & -16 & \cdot(-2) \\
0 & 0 & 1 & 0 & -5 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 3 &
\end{array}
$$

Sorge dafür, dass alle Zahlen über dem Pivot-Element in der 2. Zeile null sind.

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 24 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -16 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 3
\end{array}
$$

Die Koeffizientenmatrix befindet sich jetzt in reduzierter Zeilen-Stufen-Form (*reduced row echelon form*), aus der die Lösungen abgelesen werden können.

$x_1 = 24$

$x_2 = -16$

$x_3 = -5$

$x_3 = 3$