

---

**Folgen und Reihen**  
**Übungen**

---

### **Aufgabe 1.1**

$$a_5 = 4 \cdot 5 - 3 = 17$$

$$a_{100} = 4 \cdot 100 - 3 = 397$$

### **Aufgabe 1.2**

$$a_1 = \sin(90^\circ) = 1$$

$$a_2 = \sin(180^\circ) = 0$$

$$a_3 = \sin(270^\circ) = -1$$

$$a_4 = \sin(360^\circ) = 0$$

$$a_5 = \sin(450^\circ) = 1$$

### **Aufgabe 1.3**

$$a_5 = 5^2 - 2 \cdot 5 + 3 = 18$$

$$a_{10} = 10^2 - 2 \cdot 10 + 3 = 83$$

### **Aufgabe 1.4**

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{9}$$

### **Aufgabe 1.5**

$$a_n = 2n + 3$$

### **Aufgabe 1.6**

$$a_n = (-1)^{n+1}$$

### **Aufgabe 1.7**

$$a_n = n^2$$

### **Aufgabe 1.8**

$$a_2 = 2 \cdot a_1 - 5 = 2 \cdot 4 - 5 = 3$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 - 5 = 2 \cdot 3 - 5 = 1$$

$$a_4 = 2 \cdot a_3 - 5 = 2 \cdot 1 - 5 = -3$$

$$a_5 = 2 \cdot a_4 - 5 = 2 \cdot (-3) - 5 = -11$$

### **Aufgabe 1.9**

$$a_2 = 1 \cdot a_1 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$a_4 = 3 \cdot a_3 + 1 = 9 + 1 = 10$$

$$a_5 = 4 \cdot a_4 + 1 = 40 + 1 = 41$$

### **Aufgabe 1.10**

$$a_3 = a_2 - a_1 + 1 = 2 - 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_3 - a_2 + 1 = 2 - 2 + 1 = 1$$

$$a_5 = a_4 - a_3 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$a_6 = a_5 - a_4 + 1 = 0 - 1 + 1 = 0$$

$$a_7 = a_6 - a_5 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$$

### **Aufgabe 1.11**

$$a_1 = -10$$

$$a_{n+1} = a_n + 3$$

### **Aufgabe 1.12**

$$a_1 = 3$$

$$a_{n+1} = -2 \cdot a_n$$

### **Aufgabe 1.13**

$$s_1 = a_1 = 7$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = 7 + 12 = 19$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 7 + 12 + 17 = 36$$

### Aufgabe 1.14

$$a_1 = s_1 = 2$$

$$a_2 = s_2 - s_1 = 7 - 2 = 5$$

$$a_3 = s_3 - s_2 = 15 - 7 = 8$$

$$a_4 = s_4 - s_3 = 26 - 15 = 11$$

$$a_n = 3n - 1$$

### Aufgabe 2.1

$$\sum_{k=0}^5 k = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

### Aufgabe 2.2

$$\sum_{k=6}^8 (3k - 4) = 14 + 17 + 20 = 51$$

### Aufgabe 2.3

$$\sum_{j=0}^{100} (-1)^j = \underbrace{1-1}_0 + \underbrace{1-1}_0 + \dots + \underbrace{1-1}_0 + 1 = 1$$

### Aufgabe 2.4

$$\sum_{k=2}^{20} 5 = 5 + 5 + \dots + 5 = 19 \cdot 5 = 95$$

### Aufgabe 2.5

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^4 \sum_{j=1}^k j &= \sum_{j=1}^2 j + \sum_{j=1}^3 j + \sum_{j=1}^4 j \\ &= (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + (1 + 2 + 3 + 4) \\ &= 3 + 6 + 10 = 19 \end{aligned}$$

### Aufgabe 2.6

$$\prod_{i=2}^4 (-i) = (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) = -24$$

### Aufgabe 2.7

$$\prod_{k=1}^{100} x = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{100 \text{ Faktoren}} = x^{100}$$

### Aufgabe 2.8

$$\prod_{k=1}^{100} \frac{k}{k+2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \dots \cdot \frac{98}{100} \cdot \frac{99}{101} \cdot \frac{100}{102} = \frac{1 \cdot 2}{101 \cdot 102} = \frac{1}{5151}$$

### Aufgabe 2.9

$$\prod_{k=2}^4 2^k = 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 = 2^{2+3+4} = 2^9 = 512$$

### Aufgabe 2.10

$$\begin{aligned} \prod_{j=18}^{21} \lg j &= \lg 18 \cdot \lg 19 \cdot \lg 20 \cdot \lg 21 \\ &= \lg(18 + 19 + 20 + 21) \\ &= \lg 100 = 2 \end{aligned}$$

### Aufgabe 3.1

- (a)  $(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, \dots)$  keine AF
- (b)  $(a_n) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \dots)$  möglicherweise eine AF
- (c)  $a_n = n^2 + 1$  keine AF
- (d)  $a_1 = 1$   $a_n = 2a_n + 3$  keine AF

### Aufgabe 3.2

$$d = \frac{a_8 - a_3}{8 - 3} = \frac{34 - 9}{5} = 5$$

$$a_1 = a_3 - 2d = 9 - 10 = -1$$

$$a_n = -1 + (n - 1) \cdot 5 = 5n - 6$$

### Aufgabe 3.3

$$d = 11$$

$$a_n = 15 + (n - 1) \cdot 11 = 15 + 11n - 11 = 4 + 11n$$

### Aufgabe 3.4

$$d = \frac{a_9 - a_6}{9 - 6} = \frac{18 - 24}{3} = -2$$

$$a_1 = a_6 - 5 \cdot d = 24 - 5 \cdot (-2) = 34$$

$$a_n = 34 + (n - 1) \cdot (-2) = 34 - 2n + 2 = 36 - 2n$$

### Aufgabe 3.5

- (a) Gib die ersten 5 Glieder der AF  $a_n = 4n - 3$  an.

$$(1, 5, 9, 13, 17, \dots)$$

- (b) Bestimme den Mittelwert von  $a_1$  und  $a_3$

$$(a_1 + a_3)/2 = (1 + 9)/2 = 5 = a_2$$

- (c) Bestimme den Mittelwert von  $a_2$  und  $a_4$

$$(a_2 + a_4)/2 = (5 + 13)/2 = 9 = a_3$$

- (d) Bestimme den Mittelwert von  $a_3$  und  $a_5$

$$(a_3 + a_5)/2 = (9 + 17)/2 = 13 = a_4$$

- (e) Was stellst du fest?

Ab  $a_2$  ist jedes Folgenglied das arithmetische Mittel seiner beiden unmittelbaren Nachbarn.

### Aufgabe 4.1

- (a)  $a_n = n^2$

$$a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, \dots$$

$q$  ist nicht konstant; also keine GF

- (b)  $(a_n) = (\frac{1}{2}, -1, 2, -4, \dots)$

möglicherweise eine GF mit  $q = \frac{1}{2}$

- (c)  $a_1 = 7, a_{n+1} = 0.9 \cdot a_n$

GF mit  $q = 0.9$

### Aufgabe 4.2

$$q = \frac{4}{3}$$

$$a_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

### Aufgabe 4.3

$$a_6 = a_4 \cdot q^2$$

$$25 = 100 \cdot q^2$$

$$q^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = a_4 : q^3 = 100 : 0.5^3 = 800$$

$$a_n = 800 \cdot 0.5^{n-1}$$

### Aufgabe 4.4

$$a_5 = a_2 \cdot q^3 \quad \Rightarrow \quad 216 = 8 \cdot q^3 \quad \Rightarrow \quad q^3 = 27 \quad \Rightarrow \quad q = 3$$

$$a_7 = a_5 \cdot q^2 = 216 \cdot 3^2 = 1944$$

### Aufgabe 4.5

$$q = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$s_{10} = 4 \cdot \frac{1.25^{10} - 1}{1.25 - 1} \approx 133.01$$

### Aufgabe 4.6

$$q = 6/5 = 1.2$$

$$a_n = 5 \cdot 1.2^{n-1} < 10^8$$

$$1.2^{n-1} < 10^8/5$$

$$\lg 1.2^{n-1} < \lg(10^8/5)$$

$$(n-1) \lg 1.2 < \lg(10^8/5)$$

$$n < \frac{\lg(10^8/5)}{\lg 1.2} + 1$$

$$n < 93.21$$

also 93 Folgglieder

### Aufgabe 4.7

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$129\,140\,162 = 2 \cdot \frac{3^n - 1}{2}$$

$$129\,140\,162 = 3^n - 1$$

$$3^n = 129\,140\,163$$

$$n \lg 3 = \lg 129\,140\,163$$

$$n = \frac{\lg 129\,140\,163}{\lg 3} = 17$$

$$n = 17$$