Aufgabe 1

Bestimme einige Glieder der Folge und untersuche, ob sie beschränkt, monoton wachsend, monoton fallend oder alternierend ist.

(a) $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

(b) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

(c) $a_n = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n-1}$

(d) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^3$

(e) $a_n = \sqrt[n]{2}$

(f) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(g) $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

Aufgabe 2

Untersuche, ob die nachstehenden Folgen konvergieren oder diviergieren. Falls sie konvergieren, ist der Grenzwert anzugeben. *Beachte:* Winkel sind im Bogenmass angegeben.

(a) $a_n = (-1)^n$

(b) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

(c) $a_n = \sin n$

(d) $a_n = \dfrac{\cos n}{n}$

(e) $a_n = \dfrac{3n}{n+1} - \dfrac{n}{n+4}$

(f) $a_n = 0.8^n$

(g) $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

(h) $a_n = \dfrac{3^n}{n^3}$

(i) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

(j) $a_n = \sqrt[n]{n}$

Aufgabe 3

Bestimme den Grenzwert der Folgen (a_n).

(a) $a_n = \dfrac{1}{n}$

(b) $a_n = \dfrac{1}{n^2} - 2$

(c) $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

(d) $a_n = \dfrac{3n^2 - 1}{4n^2 + 2}$

(e) $a_n = \sqrt{\dfrac{n}{4n+1}}$

(f) $a_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$

(g) $a_n = \mathrm{e}^{-n}$

Aufgabe 4

Untersuche, ob die Folgen konvergent sind. Gib in diesem Fall den Grenzwert an.

(a) $a_n = \dfrac{1 - 1/n^2}{1 + 1/n^2}$

(b) $a_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$

(c) $a_n = \dfrac{2 + 3n^3}{n^3 - 4}$

(d) $a_n = \dfrac{n^3 + n}{n^4 + n^2}$

(e) $a_n = \dfrac{2n^3 - 2}{n - 2}$

(f) $a_n = \dfrac{2n^3 - 3n + 1}{4n + 5n^3 + 2}$

Aufgabe 5

Untersuche, ob die Folgen konvergent sind. Gib in diesem Fall den Grenzwert an.

(a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n} + 1}{2\sqrt{n} + 3}$

(b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(c) $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n + 1$

(d) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n^2 + 1}$

Aufgabe 6

Widerlege die folgenden Behauptungen durch ein Gegenbeispiel:

(a) Jede monotone Folge ist konvergent.

(b) Jede beschränkte Folge ist divergent.

(c) Jede divergente Folge ist unbeschränkt.

(d) Ist a_n divergent, so ist $\dfrac{1}{a_n}$ konvergent.