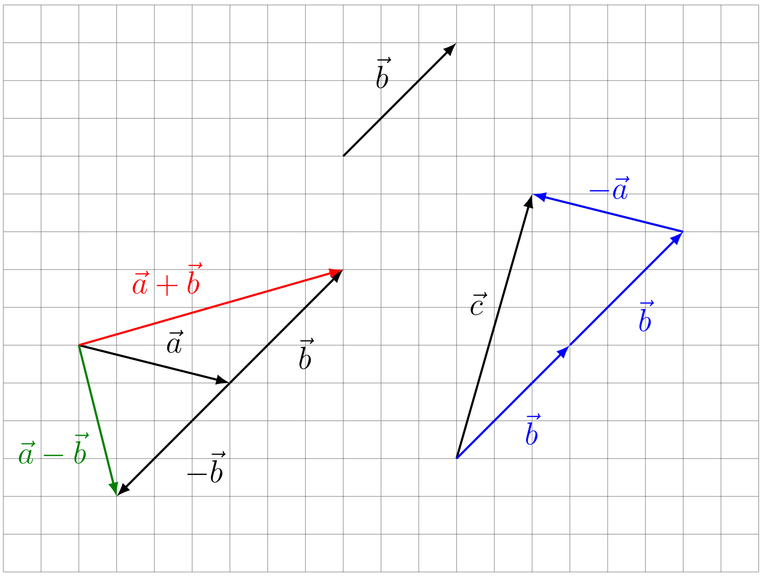
Vektorgeometrie 1

Repräsentanten von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$



Vektorgeometrie 2

Eine Vektorgleichung

$$\tfrac{1}{3}\big(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\big) = 2\vec{b}-\tfrac{1}{2}\big(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}\big) \quad || \cdot 6$$

$$2\big(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\big) = 12\vec{b}-3\big(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}\big)$$

$$4\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c} = 6\vec{b}-3\vec{a}+9\vec{c}$$

$$7\vec{a} = 8\vec{b}+7\vec{c}$$

$$\vec{a} = \tfrac{8}{7}\vec{b}+\vec{c}$$

Wenn die Gleichung $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$ nur die Lösung $\alpha=\beta=\gamma=0$ hat.

Nein, denn die Gleichung ist für $\alpha=1$, $\beta=-\frac{8}{7}$ und $\gamma=-1$ erfüllt.

Vektorgeometrie 3

Ein lineares Gleichungssystem aus 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten.

Erweiterte Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Addiere das 1-fache von Zeile 1 zur Zeile 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Tausche Zeilen 2 und 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Addiere das -3-fache von Zeile 2 zur Zeile 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Addiere das 5-fache von Zeile 3 zur Zeile 1:

Addiere das 2-fache von Zeile 3 zur Zeile 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Addiere das 2-fache von Zeile 2 zur Zeile 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$L = \{(0, -1, 0)\}$

Vektorgeometrie 4

$$3\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\8\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6\\0\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\8\\-13\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix}=-6+0-5=-11$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\-7\\12\end{pmatrix}$$

$$\vec{a_s}=\begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix}$$

Vektorgeometrie 5

$$M\left(\tfrac{3-5}{2},\tfrac{7+1}{2},\tfrac{4+8}{2}\right)=M(-1,4,6)$$

$$S\left(\tfrac{3-5+8}{3},\tfrac{7+1+4}{3},\tfrac{4+8-3}{3}\right)=S(2,4,3)$$

Vektorgeometrie 6

$$P(x,0,0)\quad\Rightarrow\quad\overrightarrow{PA}=\begin{pmatrix}1-x\\0\\3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{PB}=\begin{pmatrix}0-x\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PA}|&=|\overrightarrow{PB}|\\ \sqrt{(1-x)^2+0^2+3^2}&=\sqrt{(-x)^2+2^2+1^2}\\ 1-2x+x^2+9&=x^2+4+1\\ -2x&=-5\\ x&=2.5\end{aligned}$$

Vektorgeometrie 7

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \arccos \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \arccos \frac{9}{3 \cdot \sqrt{18}} = \arccos \frac{3}{3 \cdot \sqrt{2}}$$

$$= \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$$

Vektorgeometrie 8

Zwischenwinkelformel: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

$$\cos 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{x^2+4+0} \cdot \sqrt{0+1+1}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{x^2+4} \cdot \sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{4}{2(x^2+4)} \quad || \cdot 4(x^2+4)$$

$$x^2 + 4 = 8$$

$$x^2 = 4$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -2$$

Vektorgeometrie 9

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0-x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

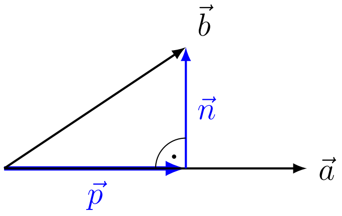
$$(2-x)(-x) = 0$$

$$(2-x)x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1(0,0,0)$$

$$x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad P_2(2,0,0)$$

Vektorgeometrie 10



$\vec{p} = k\vec{a} \quad$ und $\quad \vec{n} = \vec{b} - \vec{p} = \vec{b} - k\vec{a}$

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{n} &= 0 \quad \text{da } \vec{a} \perp \vec{n} \\
\vec{a} \cdot \left(\vec{b} - k\vec{a}\right) &= 0 \\
\vec{a} \cdot \vec{b} - k\vec{a} \cdot \vec{a} &= 0 \\
k &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 4 \cdot 7}{2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4} = \frac{42}{21} = 2
\end{aligned}$$

$$\vec{p} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Vektorgeometrie 11

Um ein Mass, wie stark sich zwei Dokumente unterscheiden.

	d_1	d_2
die	1	1
maus	1	0
ist	1	1
klein	1	0
welt	0	1
gross	0	1

$$\begin{aligned}
\sphericalangle(d_1, d_2) &= \arccos \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{1+1+1+1} \cdot \sqrt{1+1+1+1}} \\
&= \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ
\end{aligned}$$

Vektorgeometrie 12

$$\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\-4\\8\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+1+4} = 3 \quad \Rightarrow \quad \vec{c} = \pm\begin{pmatrix}6\\3\\-6\end{pmatrix}$$

Vektorgeometrie 13

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\3\\7\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}11\\-10\\-2\end{pmatrix}$$

$$F_{ABC} = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{11^2 + 10^2 + 2^2} = \tfrac{1}{2} \cdot 15 = 7.5$$

Vektorgeometrie 14

x	y	$x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i$
3	3	-6
2	0	6
7	3	2
4	2	10
3	4	2
1	2	-3
3	3	—
Summe:		11
Inhalt:		5.5

Vektorgeometrie 15

$A(2:5:1)$

$B(-4:3:1)$

$$\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-6\\26\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\-3\\13\end{pmatrix}$$

$$g\colon \begin{pmatrix}1\\-3\\13\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix} = x - 3y + 13 = 0$$

Vektorgeometrie 16

$$\begin{pmatrix}4\\6\\5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S_1(-4:1:2) = S_1(-2, 0.5)$$

$$\begin{pmatrix}4\\6\\5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6\\9\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-21\\14\\0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S_2(-21:14:0) \text{ Fernpunkt}$$

$\Rightarrow \quad g_1 \parallel g_3$

Vektorgeometrie 17

Ein Spat ist ein Körper (genauer: ein Prisma), der von 6 paarweise kongruenten Parallelogrammen begrenzt wird.

$$\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}0\\6\\-6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}7\\1\\3\end{pmatrix} = -12 \quad \Rightarrow \quad V = 12$$

Vektorgeometrie 18

(a) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

linear unabhängig (nicht kollinear)

(b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 - 6 + 6 = 0$

linear abhängig (komplanar)

Potenzen 1

Eine Exponentialgleichung

Weil die Unbekannte x im Exponenten steht.

$4 \cdot 2^x + 32 = 4^x$

$4 \cdot 2^x + 32 = (2^x)^2$

Substitution: $2^x = a$

$4a + 32 = a^2$

$0 = a^2 - 4a - 32$

$0 = (a + 4)(a - 8)$

$a_1 = -4 = 2^x \Rightarrow$ keine Lösung

$a_2 = 8 = 2^x \Rightarrow x = 3$

Potenzen 2

(a) $= \left(\frac{1}{8}\right)^{1/3} = \left(2^{-3}\right)^{1/3} = 2^{-1} = 1/2$

(b) $= (2^4)^{-3/4} = 2^{-3} = 1/8$

(c) $= a^{\frac{9}{12}} : \left(a^{\frac{8}{12}} : a^{\frac{12}{12}}\right) = a^{\frac{9}{12} - \frac{8}{12} + \frac{12}{12}} = a^{\frac{13}{12}}$

Potenzen 3

(a) $9^{1.5} = \left(3^2\right)^{\frac{3}{2}} = 3^3 = 27 \in \mathbb{N}$ wahr

(b) $\pi^{100} < \left(3^2\right)^{50}$ falsch, da $\pi \approx 3.1415 > 3$

(c) $\left(\frac{6}{3} + \frac{2}{3}\right)^{0.5} = 4^{0.5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{0.5}$

$\left(\frac{8}{3}\right)^{0.5} = \left(4 \cdot \frac{2}{3}\right)^{0.5} = \left(\frac{8}{3}\right)^{0.5}$ wahr

Logarithmen 1

Eine Logarithmusgleichung

$$
\begin{aligned}
\log_2(2x-11) - \log_2(x-4) &= \log_2(x-6) \\
\log_2 \frac{2x-11}{x-4} &= \log_2(x-6) \\
\frac{2x-11}{x-4} &= x-6 \\
2x-11 &= (x-6)(x-4) \\
2x-11 &= x^2-10x+24 \\
0 &= x^2-12x+35 \\
0 &= (x-7)(x-5) \\
x_1 &= 7 \quad \text{Probe: Lösung} \\
x_2 &= 5 \quad \text{Probe: keine Lösung}
\end{aligned}
$$

Logarithmen 2

eine Exponentialgleichung (Variable im Exponenten)

$$
\begin{aligned}
2^{4x} + 2^{4x+3} &= 36 \\
2^{4x} + 2^{4x} \cdot 2^3 &= 36 \quad \text{Potenzgesetze} \\
2^{4x}(1+8) &= 36 \quad \text{Faktorisieren} \\
9 \cdot 2^{4x} &= 36 \\
2^{4x} &= 4 \quad \text{gleiche Basen erzwingen} \\
2^{4x} &= 2^2 \quad \text{Exponenten vergleichen} \\
4x &= 2 \\
x &= 1/2
\end{aligned}
$$

Logarithmen 3

$$
\begin{aligned}
x^{\lg x} &= 10^4 \quad \text{Gleichung logarithmieren} \\
\lg x^{\lg x} &= \lg 10^4 \quad \text{Logarithmengesetze} \\
\lg x \cdot \lg x &= 4 \\
(\lg x)^2 &= 4 \\
\lg x_1 &= 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 10^2 = 100 \quad \text{(Probe: OK)} \\
\lg x_2 &= -2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 10^{-2} = 0.01 \quad \text{(Probe: OK)}
\end{aligned}
$$

Logarithmen 4

$$
\begin{aligned}
&\left(\log_{\sqrt{3}} 5\right)^2 \cdot \log_5 9 \cdot \log_{\sqrt{5}} 3 \\
&= \left(\frac{\lg 5}{\lg \sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{\lg 9}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 3}{\lg \sqrt{5}} \\
&= \frac{\lg 5 \cdot \lg 5}{\lg \sqrt{3} \cdot \lg \sqrt{3}} \cdot \frac{\lg 9}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 3}{\lg \sqrt{5}} \\
&= \frac{\lg 5 \cdot \lg 5}{\frac{1}{2}\lg 3 \cdot \frac{1}{2}\lg 3} \cdot \frac{2\lg 3}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 3}{\frac{1}{2}\lg 5} \\
&= \frac{2}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 16
\end{aligned}
$$

Logarithmen 5

$$\begin{aligned}
2 &= 1 \cdot (1 + 0.01)^n \\
2 &= 1.01^n \\
\lg 2 &= \lg 1.01^n \\
\lg 2 &= n \cdot \lg 1.01 \\
n &= \frac{\lg 2}{\lg 1.01} = \frac{0.3010}{0.0043}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lg(0.3010 : 0.0043) &= \lg(10^{-1} \cdot 3.01) - \lg(10^{-3} \cdot 4.3) \\
&= 2 + 0.4786 - 0.6335 = 1 + 0.8451 \\
&= \lg(10^1 \cdot 7.00) = \lg(70)
\end{aligned}$$

Also dauert es etwa 70 Jahre.

Logarithmen 6

$N(t) = N(0) \cdot 10^{-kt}$

eine Zerfallsgleichung

$$\begin{aligned}
0.5 &= 1 \cdot 10^{-k \cdot 23.5} \\
\lg 0.5 &= -23.5 \cdot k \cdot \lg 10 \\
-\lg 2 &= -23.5 \cdot k \\
k &= \frac{0.3010}{23.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lg(0.3010 : 23.5) &= \lg(10^{-1} \cdot 3.01) - \lg(10^1 \cdot 2.35) \\
&= -1 + 0.4786 - 1 - 0.3711 \\
&= -2 + 0.1075 \\
&= \lg(10^{-2} \cdot 1.28) = \lg(\underbrace{0.0128}_{k})
\end{aligned}$$

Folgen und Reihen 1

Der Beginn einer Folge

Um eine arithmetische Folge.

Weil die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant ist. (oder: Für $n \geq 2$ ist jedes Folgeglied das arithmetische Mittel seiner Nachbarglieder.)

$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 1$

Summenformel der AF:

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) \\
&= \frac{200}{2} \cdot (3 + [4 \cdot 200 - 1]) \\
&= 100 \cdot 802 = 80\,200
\end{aligned}$$

Folgen und Reihen 2

Der Beginn einer Folge

Um eine geometrische Folge.

Weil der Quotient aufeinanderfolgender Glieder konstant 2 ist. (oder: Für $n \geq 2$ ist jedes Folgeglied das geometrische Mittel seiner Nachbarglieder.)

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

Summenformel der AF:

$$\begin{aligned} s_{100} &= a_1 \cdot \frac{q^{100} - 1}{q - 1} = 3 \cdot \frac{2^{100} - 1}{2 - 1} \\ &= 3 \cdot \left(2^{100} - 1\right) \approx 3 \cdot 2^{100} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg 2^{100} &= 100 \cdot \lg 2 = 100 \cdot 0.3010 \\ &= 30.1 = 30 + 0.1 = \lg(10^{30} \cdot 1.26) \end{aligned}$$

$s_{100} \approx 3.78 \cdot 10^{30}$

Folgen und Reihen 3

Die rekursive Definition einer arithmetischen Folge.

$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 2$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$s_{100} = \frac{100}{2}(1 + 3 \cdot 100 - 2)$$

$$s_{100} = 50(300 - 1)$$

$$s_{100} = 50 \cdot 300 - 50 \cdot 1$$

$$s_{100} = 15\,000 - 50$$

$$s_{100} = 14\,950$$

Folgen und Reihen 4

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k \quad = 1 + 2 + \cdots + 99 + 100 = \frac{100}{2}(1 + 100) = 5050$

(b)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} \quad &= 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \ldots \\ &= 0.1 + 0.01 + 0.001 + \ldots \\ &= 0.111\ldots = 1/9\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{100}(k - 50) = (1 - 50) \cdot (2 - 50) \cdot \ldots \cdot (100 - 50) = 0$

Folgen und Reihen 5

$$\begin{aligned}a_{41} &= a_1 + (n - 1) \cdot d \\ 100 &= 20 + (41 - 1) \cdot d \\ 80 &= 40 \cdot d \\ d &= 2\end{aligned}$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$s_{41} = \frac{41}{2}(20 + 100) = 41 \cdot 60 = 2460$$

Folgen und Reihen 6

$$\begin{aligned}s_n &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \\ s_n &= \frac{n}{2}\big(a_1 + a_1 + (n - 1)d\big) \\ 2s_n &= n\big(2a_1 + (n - 1)d\big) \\ 840 &= 21(2a_1 + 20 \cdot 3) \\ 40 &= 2a + 60 \\ -20 &= 2a \\ a &= -10 \\ a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ a_{21} &= -10 + (21 - 1) \cdot 3 \\ a_{21} &= -10 + 60 \\ a_{21} &= 50\end{aligned}$$

Folgen und Reihen 7

$$\begin{array}{rl} s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ s_n &= a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 \\ \hline 2s_n &= n(a_1 + a_n) \quad \text{Begründung!} \\ s_n &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \end{array}$$

oder:

$$\begin{array}{rl} s_n &= a_1 + [a_1 + d] + \ldots + [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + (n-1)d] \\ s_n &= [a_1 + (n-1)d] + a_1 + (n-2)d + \ldots + [a_1 + d] + a_1 \\ \hline 2s_n &= n\big[2a_1 + (n-1)d\big] \quad \text{Begründung!} \\ s_n &= na_1 + \frac{n}{2}\big[(n-1)d\big] \end{array}$$

Folgen und Reihen 8

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$96 = 3 \cdot q^{6-1}$$

$$32 = q^5$$

$$q = 2$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$s_6 = 3 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1}$$

$$s_6 = 3 \cdot 64$$

$$s_6 = 192$$

Folgen und Reihen 9

$$\begin{aligned}
s_n &= a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \\
364 &= 3 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} \\
2 \cdot 364 &= 3(3^n - 1) \\
2 \cdot 121 &= 3^n - 1 \\
243 &= 3^n \\
n &= 5
\end{aligned}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_5 = 1 \cdot 3^4$$

$$a_5 = 81$$

Folgen und Reihen 10

Die Streckenlängen bilden eine GF mit $a_1 = 16$ und $q = \frac{1}{2}$
Summenformel der nichtabbrechenden GF:
$s_\infty = a_1 \cdot \dfrac{1}{1-q} = 16 \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 16 \cdot 2 = 32$
Die Streckenlängen in x-Richtung bilden eine GF mit $a_1 = 16$ und $q = -\frac{1}{4}$.
Summenformel der nichtabbrechenden GF:
$s_\infty = a_1 \cdot \dfrac{1}{1-q} = 16 \cdot \dfrac{1}{1 + \frac{1}{4}} = 16 \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{64}{3}$

Folgen und Reihen 11

$$
\begin{aligned}
s &= 9^2 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 \cdot 1^2 + \ldots \\
&= 81 + 27 + 9 + \ldots
\end{aligned}
$$

Die Summe der Inhalte der Quadrate mit gleicher Seitenlänge bilden eine GF mit dem Startwert $a_1 = 81$ und dem Faktor $q = \frac{1}{3}$.

$$
s = 81 \cdot \frac{1}{1 - 1/3} \quad = 81 \cdot \frac{1}{2/3} = 81 \cdot \frac{3}{2} \quad = \frac{243}{2} = 121.5\,\mathrm{cm}^2
$$

Folgen und Reihen 12

$$
\begin{aligned}
s_n &= a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1} \\
q s_n &= \qquad\quad a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \\
\hline
s_n - q s_n &= a_1 - a_1 q^n \\
s_n(1 - q) &= a_1(1 - q^n) \\
s_n &= \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{q^n - 1}{q - 1}
\end{aligned}
$$