

# Examen GF Mathematik (PAM)

Kurzfragen 2017

Die mit einem + gekennzeichneten Fragen sind „längere Kurzfragen“.

# Kurzfrage 1+

Was ist ein Vektor?

Ein Vektor ist die Menge aller gerichteten Strecken („Pfeile“) mit gleicher Länge und gleicher Richtung.

## Kurzfrage 2

Was ist ein *Repräsentant* eines Vektors?

Ein gerichtete Strecke (Pfeil) zwischen zwei Punkten.

## Kurzfrage 3+

Wie werden zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  grafisch addiert?

Man erhält einen Repräsentanten des Summenvektors, indem man

- ▶ einen beliebigen Repräsentanten  $\overrightarrow{PQ}$  des ersten Vektors  $\vec{a}$  wählt,
- ▶ den Repräsentanten  $\overrightarrow{QR}$  von  $\vec{b}$  wählt, der in  $Q$  beginnt,
- ▶ den Anfangspunkt von  $\overrightarrow{PQ}$  mit dem Endpunkt von  $\overrightarrow{QR}$  verbindet.



## Kurzfrage 4+

Was ist der Nullvektor?

Der Nullvektor ist der Vektor, dessen Repräsentanten den gleichen Anfangs- und Endpunkt haben.

## Kurzfrage 5+

Was ist der Gegenvektor eines Vektors  $\vec{a}$ ?

Das ist der Vektor  $\vec{b}$ , den man zu  $\vec{a}$  addieren muss, um den Nullvektor zu erhalten.

## Kurzfrage 6

Was ist ein Skalar?

Ein Skalar ist eine Zahl.

## Kurzfrage 7

Wie lässt sich die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl geometrisch interpretieren?

Es handelt sich um eine zentrische Streckung des Vektors mit der Zahl als Faktor.



## Kurzfrage 8

Wie ist die Vektorsubtraktion definiert?

Man subtrahiert den Vektor  $\vec{b}$  vom Vektor  $\vec{a}$ , indem man den Gegenvektor von  $\vec{b}$  zum Vektor  $\vec{a}$  addiert.

## Kurzfrage 9

Was ist eine Linearkombination von Vektoren?

Eine Summe von skalaren Vielfachen dieser Vektoren.

## Kurzfrage 10

Was sind kollineare Vektoren?

Kollineare Vektoren sind Vektoren, die zu einer gemeinsamen Geraden parallel sind.

## Kurzfrage 11

Was sind komplanare Vektoren?

Koplanare Vektoren sind Vektoren, die zu einer gemeinsamen Ebene parallel sind.



## Kurzfrage 12+

Was sind Vektoren linear unabhängigig?

Wenn eine Linearkombination dieser Vektoren nur dann den Nullvektor ergibt, wenn alle skalaren Faktoren null sind.

## Kurzfrage 13+

Was ist eine Basis eines Vektorraums  $V$ ?

Eine Menge linear unabhängiger Vektoren, mit der sich jeder Vektor eindeutig als Linearkombination darstellen lässt.

## Kurzfrage 14+

Was ist ein Ortsvektor?

Ein Ortsvektor ist der Repräsentant eines Vektors, dessen Anfangspunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegt.

Der Ausdruck *Ortsvektor* ist im Grunde irreführend, da es sich nicht um einen Vektor sondern um einen speziellen Repräsentanten handelt.

## Kurzfrage 15+

Was ist die Komponentendarstellung eines Vektors?

Die Darstellung eines Vektors als Summe von Vielfachen von Basisvektoren.



## Kurzfrage 16

Welche Komponentendarstellung haben die Vektoren der Standardbasis in  $\mathbb{R}^3$ ?

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Kurzfrage 17

Wie werden zwei Vektoren in der Komponentendarstellung addiert?

Indem man sie komponentenweise addiert.

## Kurzfrage 18

Wie werden zwei Vektoren in der Komponentendarstellung subtrahiert?

Indem man sie komponentenweise subtrahiert.

## Kurzfrage 19

Wie wird ein Vektor in der Komponentendarstellung mit einer Zahl multipliziert?

Indem man sie komponentenweise mit dieser Zahl multipliziert.



## Kurzfrage 20

Was ist die geometrische Bedeutung des Betrags eines Vektors?

seine Länge

## Kurzfrage 21

Was ist ein Tetraeder?

Ein Tetraeder ist ein Körper, der von vier Dreiecken begrenzt wird.

## Kurzfrage 22

Wie berechnet man den Betrag eines Vektors in Komponentendarstellung?

Man zieht die Wurzel aus der Summe der Komponentenquadrate.

## Kurzfrage 23

Wie bestimmt man den Vektor  $\overrightarrow{AB}$  in der Komponentendarstellung?

Ortsvektor zum Endpunkt minus Ortsvektor zum Anfangspunkt.



## Kurzfrage 24

Wie berechnet man den Abstand von zwei Punkten  $A$  und  $B$ ?

Indem man den Betrag der Differenz dieser beiden Vektoren berechnet.

## Kurzfrage 25

Was ist der Einheitsvektor zu einem Vektor  $\vec{a}$ ?

Ein Vektor in Richtung von  $\vec{a}$  mit der Länge 1.

## Kurzfrage 26+

Was ist eine orthonormierte Basis eines Vektorraums?

Eine Basis bestehend aus Vektoren, die alle die Länge 1 haben und die jeweils paarweise senkrecht zueinander stehen.

## Kurzfrage 27+

Wie ist das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren definiert?

Die Länge des ersten Vektors multipliziert mit der Länge des zweiten Vektors multipliziert mit dem Cosinus des Zwischenwinkels.



## Kurzfrage 28+

Wie berechnet man das Skalarprodukt zweier Vektoren in der Komponentendarstellung?

Das Skalarprodukt ist die Summe der Produkte einander entsprechender Komponenten.

## Kurzfrage 29

Was heisst *orthogonal*?

senkrecht

## Kurzfrage 30

Wann sind zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  orthogonal?

Wenn ihr Skalarprodukt den Wert Null hat, d. h. wenn  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  gilt.

## Kurzfrage 31+

Nenne die drei Eigenschaften, die das Vektorprodukt (=Kreuzprodukt) zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  definieren.

Das Vektorprodukt  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  ist ein Vektor mit den folgenden Eigenschaften:



Das Vektorprodukt  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  ist ein Vektor mit den folgenden Eigenschaften:

- ▶  $\vec{c} \perp \vec{a}$  und  $\vec{c} \perp \vec{b}$
- ▶  $|\vec{c}|$  ist gleich der Masszahl des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms.
- ▶  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

## Kurzfrage 32+

Was ist ein Spat?

Ein Spat ist ein Körper, der von 6 jeweils paarweise kongruenten und parallelen Parallelogrammen begrenzt wird.

## Kurzfrage 33+

Wie ist das Spatprodukt von drei Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  in  $\mathbb{R}^3$  definiert?

Das Spatprodukt von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  ist die Zahl, die man erhält, wenn man das Skalarprodukt aus dem Kreuzprodukt von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  und dem Vektor  $\vec{c}$  berechnet.

## Kurzfrage 34

Wie lauten die homogenen Koordinaten eines Punktes mit den Koordinaten  $x$  und  $y$ ?

$(x : y : 1)$

## Kurzfrage 35

Wie ist die Koordinatengleichung einer Geraden in der Ebene definiert?



$$g: ax + by + c = 0$$

## Kurzfrage 36

Beschreibe die drei Variablen im Ausdruck  $a^b = c$  mit Fachausdrücken.

- $a$  Basis
- $b$  Exponent
- $c$  Potenz

## Kurzfrage 37+

Wie werden zwei Potenzen mit gleicher Basis multipliziert?

Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die gemeinsame Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

## Kurzfrage 38+

Wie werden zwei Potenzen mit gleichem Exponenten multipliziert?

Zwei Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man das Produkt der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

## Kurzfrage 39+

Wie werden zwei Potenzen mit gleicher Basis dividiert?



Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die gemeinsame Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert.

## Kurzfrage 40+

Wie werden zwei Potenzen mit gleichem Exponenten dividiert?

Zwei Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man den Quotienten der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

## Kurzfrage 41+

Wie wird eine Potenz potenziert?

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert.

## Kurzfrage 42

Welchen Wert hat  $a^0$  wenn  $a \neq 0$  ist?

$$a^0 = 1 \text{ für } a \neq 0$$

## Kurzfrage 43

Welchen Wert hat  $0^n$  für  $n \in \mathbb{N}$ ?



$0^n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

## Kurzfrage 44

Welchen Wert hat  $a^1$ ?

$a^1 = a$  für alle  $a \in \mathbb{R}$

## Kurzfrage 45

Welchen Wert hat  $1^n$ ?

$1^n = 1$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$

## Kurzfrage 46

Welchen Wert hat  $0^0$ ?

$0^0$  ist *nicht definiert!*

## Kurzfrage 47+

Wie kann man die  $n$ -te Wurzel als Potenz darstellen?



Indem man den Radikanden mit dem Kehrwert des Wurzelexponenten potenziert.

## Kurzfrage 48+

Wie ist der Ausdruck  $a^{-n}$  definiert?

$a^{-n}$  ist der Kehrwert von  $a^n$  für  $a \neq 0$ .

## Kurzfrage 49

Berechne z. B.  $6^3$  oder  $\sqrt[3]{27}$  oder  $\log_{15} 225$

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	9	27	81	243	729				
4	16	64	256	1024					
5	25	125	625						
6	36	216							
7	49	343							
8	64	256							
9	81	729							
10	100	1000							
11	121								
12	144								
13	169								
14	196								
15	225								
16	256								



## Kurzfrage 50

Wie ist der Logarithmus von  $b$  zur Basis  $a$  definiert? ( $\log_a b$ )

Der Logarithmus von  $b$  zur Basis  $a$  ist der Exponent  $c$  mit dem man  $a$  potenzieren muss, um  $b$  zu erhalten.

## Kurzfrage 51

Für welche Basen  $b$  ist ein Logarithmus sinnvoll definiert?



für  $0 < b < 1$  und  $1 < b < \infty$

## Kurzfrage 52

Was ist der Numerus?

# Das Argument eines Logarithmus

## Kurzfrage 53

Für welche Numeri ist ein Logarithmus sinnvoll definiert?

Für positive Numeri.

## Kurzfrage 54

Was ist ein Logarithmensystem?

Die Menge aller Logarithmen zur gleichen Basis.

## Kurzfrage 55

Gib die eulersche Zahl  $e$  auf mindestens sechs signifikante Stellen genau an.



$e = 2.718281828459\dots$

## Kurzfrage 56

Wofür steht  $\ln x$ ?

$\ln x$  steht für den *natürlichen Logarithmus*; d. h. den Logarithmus zur Basis  $e$ .

## Kurzfrage 57

Wofür steht  $\lg x$ ?

$\lg x$  steht für den *gemeinen* Logarithmus; d. h. den Logarithmus zur Basis 10.

## Kurzfrage 58+

Wie wird der Logarithmus eines Produkts berechnet?

Der Logarithmus eines Produkts ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren.

## Kurzfrage 59+

Wie wird der Logarithmus eines Quotienten berechnet?



Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen von Dividend und Divisor.

## Kurzfrage 60+

Wie wird der Logarithmus einer Potenz berechnet?

Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt des Exponenten mit dem Logarithmus der Basis.

## Kurzfrage 61

Was ist eine Exponentialgleichung?

Eine Gleichung, bei der die Variable im Exponenten steht.

## Kurzfrage 62

Was ist eine Logarithmusgleichung?

Eine Gleichung, bei der die Variable im Numerus eines Logarithmus steht.

## Kurzfrage 63+

Wie lautet die Funktionsgleichung des exponentiellen Wachstums?



$$f(t) = a \cdot b^{k \cdot t}$$

$t$  Zeit

$a$  Anfangswert

$b$  Basis

$k$  Wachstumskonstante ( $k > 0$ )

## Kurzfrage 64+

Wie lautet die Funktionsgleichung des exponentiellen Zerfalls?

$$f(t) = a \cdot b^{-k \cdot t}$$

$t$  Zeit

$a$  Anfangswert

$b$  Basis

$k$  Zerfallskonstante ( $k > 0$ )

## Kurzfrage 65+

Wie lautet die Zinseszinsformel?

$$K(n) = K(0) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$K(n)$  Endkapital

$K(0)$  Anfangskapital

$p$  Jahreszinsfuß (in Prozent)

$n$  Anzahl Jahre

## Kurzfrage 66+

Was ist eine Folge?

Eine Folge  $(a_n)$  ist eine Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl  $n$  (Index) eine reelle Zahl  $a_n$  zuordnet.

## Kurzfrage 67+

Was ist das explizite Bildungsgesetz einer Folge?



Das ist eine Vorschrift (Formel), mit der man das  $n$ -te Folgeglied direkt aus dem Index  $n$  berechnen kann.

## Kurzfrage 68+

Was ist das rekursive Bildungsgesetz einer Folge?

Das eine Vorschrift, welche die ersten  $k$  Glieder einer Folge vorgibt und die beschreibt, wie man jeweils das nächste Folgenglied aus seinen  $k$  Vorgängern berechnet.

## Kurzfrage 69+

Was ist die Fibonacci-Folge?

Die Folge mit den ersten beiden Gliedern  $a_1 = a_2 = 1$  und bei der jedes weitere Folgenglied die Summe seiner beiden Vorgänger ist.

## Kurzfrage 70

Was ist eine Reihe?

Eine Reihe ist die Teilsummenfolge  $(s_n)$ , die zu einer Folge  $(a_n)$  gehört.

## Kurzfrage 71

Welches Symbol stellt das Summenzeichen dar?



Das grosse griechische Sigma.

## Kurzfrage 72

Welches Symbol stellt das Produktzeichen dar?

# Das grosse griechische Pi

## Kurzfrage 73

Was bedeutet  $n$  Fakultät?

Das Produkt aus den ersten  $n$  natürlichen Zahlen.

## Kurzfrage 74+

Wann ist eine Folge monoton wachsend (fallend)?

Eine Folge  $(a_n)$  ist monoton wachsend [fallend], wenn jedes Folgenglied kleiner [größer] als sein Nachfolger ist.

## Kurzfrage 75

Was ist eine arithmetische Folge?



Eine Folge, bei der die Differenz von jedem Folgeli ed zu seinem Vorgänger konstant ist.

## Kurzfrage 76+

Wie lautet das explizite Bildungsgesetz einer AF?

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \text{ mit } d = \text{konstant}$$

## Kurzfrage 77

Wie lautet die Summenformel der AF?

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

## Kurzfrage 78

Was ist eine geometrische Folge?

Eine Folge, bei der der Quotient aus jedem Folgenglied und seinem Vorgänger konstant ist.

## Kurzfrage 79+

Wie lautet die explizite Definition einer GF?



$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \text{ mit } q = \text{konstant}$$

## Kurzfrage 80+

Wie lautet die Summenformel der GF?

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

## Kurzfrage 81+

Wie berechnet man die Summe der nichtabbrechenden geometrische Folge?

$$\text{Wenn } s = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q}$$

## Kurzfrage 82

Wann ist die Summe der nichtabbrechenden geometrische Folge definiert?

Wenn  $|q| < 1$  gilt.

## Kurzfrage 83

Was ist eine alternierende Folge?



Eine Folge, bei der jedes Folgenglied ein anderes Vorzeichen als sein Vorgänger hat.