Aufgabe 1

$A(n)$: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

(a) Induktionsanfang:

$n = 1$: $\quad 1 = 1^2$ (wahr)

(b) Induktionsschritt:

- Induktionsvoraussetzung:

  $A(n)$ sei wahr für ein $n \geq 1$

- $n \to n + 1$:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) &\overset{\text{IV}}{=} n^2 + (2n + 1) \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 2

$A(n)$: $8^n - 1$ ist durch 7 teilbar

(a) Induktionsanfang:

$n = 1$: $7 \mid (8^1 - 1) \quad$ (wahr)

(b) Induktionsschritt:

- Induktionsvoraussetzung:

  $A(n)$ sei wahr für ein $n \geq 1$

- $n \to n + 1$: [zeige: $7 \mid (8^{n+1} - 1)$]

$$\begin{aligned} 8^{n+1} - 1 &= 8 \cdot 8^n - 1 = 1 \cdot 8^n + 7 \cdot 8^n - 1 \\ &= (8^n - 1) + 7 \cdot 8^n \end{aligned}$$

  $7 \mid (8^n - 1)$ nach IV

  $7 \mid (7 \cdot 8^n)$

  also: $7 \mid (8^{n+1} - 1)$ $\square$

Aufgabe 3

$A(n)$: $3^n < n!$

(a) Induktionsanfang:

$n = 7$: $\quad 3^7 < 7! \quad$ (wahr, da $2187 < 5040$)

(b) Induktionsschritt:

- Induktionsvoraussetzung:

  $A(n)$ sei wahr für ein $n \geq 7$

- $n \to n+1$:

  $3^{n+1} = 3^n \cdot 3 \overset{\text{IV}}{<} n! \cdot 3 \overset{*}{<} n! \cdot (n+1) < (n+1)!$

  $*$ gilt wegen $3 < 7 \leq n < n+1$ (IV)

$\square$

Aufgabe 4

$A(n)$: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1)$

(a) Induktionsanfang:

$n = 1$: $\quad 1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \quad$ (wahr)

(b) Induktionsschritt:

- Induktionsvoraussetzung:
  $A(n)$ sei wahr für ein $n \geq 1$
- $n \to n+1$:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &\overset{\text{IV}}{=} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}\,(n+1)\big[n(2n+1) + 6(n+1)\big] \\ &= \frac{1}{6}\,(n+1)\big[2n^2 + 7n + 6\big] \\ &= \frac{1}{6}\,(n+1)(n+2)(2n+3) \qquad \square \end{aligned}$$

Aufgabe 5

$A(n)$: $2^n > n^2$

(a) Induktionsanfang:

$n = 5$: $\quad 2^5 > 5^2 \qquad$ (wahr)

(b) Induktionsschritt:

- Induktionsvoraussetzung:

  $A(n)$ sei wahr für ein $n \geq 5$

- $n \to n+1$:

  $$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{IV}}{>} 2 \cdot n^2 \overset{*}{>} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

  $*$ kann durch direkt bewiesen werden:

  $$\begin{aligned} 2 \cdot n^2 &> n^2 + 2n + 1 \\ n^2 - 2n + 1 &> 2 \\ (n-1)^2 &> 2 \quad \text{da } n \geq 5 \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 6

$$A(n): \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = ?$$

Die ersten (gekürzten) Teilsummen

$$s_1 = \frac{1}{3},\ s_2 = \frac{2}{5},\ s_3 = \frac{3}{7},\ s_4 = \frac{4}{9},\ \ldots$$

lassen vermuten: $? = \dfrac{n}{2n+1}$

(a) Induktionsanfang: $n = 1$: $\quad \dfrac{1}{1 \cdot 3} = \dfrac{1}{2 \cdot 1 + 1} \qquad$ (wahr)

(b) Induktionsschritt:

- Induktionsvoraussetzung:

  $A(n)$ sei wahr für ein $n \geq 1$

- $n \to n+1$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\\
&\overset{\text{IV}}{=}\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\\
&=\frac{n(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\\
&=\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}\\
&=\frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}\quad\square
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7

- $A(2)$ kann wahr oder falsch sein, da die Vererbung $A(n)\to A(n+1)$ erst ab $n\geq 12$ gilt.
- $A(13)$ ist falsch, denn wäre $A(13)$ wahr, so müssten wegen der Gültigkeit des Induktionsschritts für $n\geq 12$ auch alle weiteren Aussagen $A(14)$, $A(15)$, ... wahr sein. Dies steht jedoch im Wiederspruch dazu, dass $A(15)$ falsch ist.
- $A(18)$ ist unbestimmt, denn aus der falschen Aussage $A(15)$ können trotz logisch richtiger Vererbung falsche oder wahre Aussagen entstehen.
- $A(24)$ ist wahr, denn $A(20)$ ist wahr (Verankerung) und mit der Vererbung der Aussage für $n\geq 12$ wird die Gültigkeit der wahren Aussage $A(20)$ auf alle folgenden Aussagen übertragen.

Aufgabe 8

(a) Mit dem binomischen Lehrsatz gilt:

$$
\begin{aligned}
7^n+1&=(6+1)^n+1\\
&=\binom{n}{0}\cdot 6^n\cdot 1^0+\binom{n}{1}\cdot 6^{n-1}\cdot 1^1+\binom{n}{2}\cdot 6^{n-2}\cdot 1^2+\dots\\
&\quad+\binom{n}{n-1}\cdot 6^1\cdot 1^{n-1}+\underbrace{\binom{n}{n}\cdot 6^0\cdot 1^n}_{1}+1
\end{aligned}
$$

Offenbar sind die ersten n Summanden alle durch 6 teilbar. Die Summe der letzten beiden Summanden beträgt jedoch 2. Somit kann 7^n+1 nicht durch 6 teilbar sein.

(b)
- Induktionshypothese:

  $A(n)$ sei wahr für ein $n\in\mathbb{N}$

- $n \to n+1$:

  $7^{n+1} + 1 = 7 \cdot 7^n + 1 = 1 \cdot 7^n + 6 \cdot 7^n + 1 = (7^n + 1) + 6 \cdot 7^n$

  $7^n + 1$ ist aufgrund der Induktionshypothese (die falsch ist!) durch 6 teilbar. Offenbar ist auch $6 \cdot 7^n$ durch 6 teilbar, was bedeutet, dass $7^{n+1} + 1$ durch 6 teilbar ist.

Aufgabe 9

Sei $p \geq -1$. Dann gilt $(1+p)^n \geq 1 + n \cdot p$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Induktionsanfang:

$n = 1: \quad (1+p)^1 = 1 + p \geq 1 + 1 \cdot p \quad$ (wahr)

(b) Induktionsschritt:

- Induktionsvoraussetzung:

  Die Behauptung sei wahr für ein $n \geq 1$.

- Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}(1+p)^{n+1} &= (1+p)^n \cdot (1+p) \overset{\text{IV}}{\geq} (1 + n \cdot p)(1+p) \\ &= 1 + p + np + np^2 = 1 + (n+1)p + np^2 \\ &\geq 1 + (n+1)p\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 10

$A(n)$: $3^n - 3$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ ohne Rest durch 6 teilbar.

(a) Induktionsanfang:

$n = 1: \quad 3^1 - 3 = 0$ ist durch 6 teilbar $\quad$ (wahr)

(b) Induktionsschritt:

- Induktionshypothese:

  $A(n)$ sei wahr für ein $n \geq 1$.

- Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}3^{n+1} - 3 &= 3^n \cdot 3^1 - 3 = 3(3^n - 1) = 3(3^n \underbrace{-3+3}_{0} -1) \\ &= 3(3^n - 3 + 2) = 3(3^n - 3) + 6\end{aligned}$$

  Der erste Summand ist aufgrund der Induktionshypothese durch 6 teilbar. Der zweite Summand ist ebenfalls durch 6 teilbar. Also ist die gesamte Summe durch 6 teilbar. $\square$

Aufgabe 11

(a) Induktionsverankerung:

$n = 3$:

Einerseits hat ein Dreieck keine (0) Diagonalen.

Andererseits erhalten wir $\dfrac{3(3-3)}{2} = 0$ (wahr)

(b)
- Induktionshypothese:

  $A(n)$ sei wahr für ein $n \geq 3$.

- Induktionsschritt:

  Gegeben ist ein $(n+1)$-Eck. Wählen wir eine beliebige Ecke E und verbinden deren beiden Nachbarecken, so erhalten wir ein n-Eck und ein Dreieck.

  Im n-Eck gibt es nach IV $D(n) = n(n-3)/2$ Diagonalen.
  Hinzu kommen noch alle Diagonalen, die von der Ecke E zu den $n-2$ Ecken des n-Ecks möglich sind sowie die Verbindungsstrecke, die das Dreieck abtrennt. Insgesamt:

$$
\begin{aligned}
D(n+1) = D(n) + (n-2) + 1 &= \frac{n(n-3)}{2} + n - 1 \\
&= \frac{n(n-3)}{2} + \frac{2(n-1)}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2} \\
&= \frac{n^2 - n - 2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}
\end{aligned}
$$

$\square$