Vollständige Induktion **Übungen**

Beweise mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 1

$A(n)$: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

Aufgabe 2

$A(n)$: $8^n - 1$ ist durch 7 teilbar [formal: $7 \mid (8^n - 1)$]

Aufgabe 3

$A(n)$: $3^n < n!$

Aufgabe 4

$A(n)$: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}\, n(n + 1)(2n + 1)$

Aufgabe 5

$A(n)$: $2^n > n^2$

Aufgabe 6

Berechne einige Glieder der Teilsummenfolge und finde eine explizite Definition der Summe. Beweise anschliessend $A(n)$ mit vollständiger Induktion.

$A(n)$: $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \,?$

Aufgabe 7

Von einer Aussage $A(n)$ ist folgendes bekannt: $A(1)$ und $A(20)$ sind wahr. $A(15)$ ist falsch. $A(n) \rightarrow A(n{+}1)$ gilt für $n \geq 12$. Was lässt sich über $A(2)$, $A(13)$, $A(18)$ und $A(24)$ sagen?

Aufgabe 8

Hier eine Aussage mit fehlender Verankerung aber beweisbarem Induktionsschritt.

$A(n)$: $7^n + 1$ ist durch 6 teilbar. Zeige:

(a) $A(n)$ ist für kein $n \in \mathbb{N}$ wahr

(b) $A(n) \rightarrow A(n + 1)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 9

Beweise mit vollständiger Induktion die Bernoulli-Ungleichung:

Sei $p \geq -1$. Dann gilt $(1+p)^n \geq 1 + n \cdot p$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 10

Zeige mit vollständiger Induktion, dass für jede natürliche Zahl n der Term $3^n - 3$ ohne Rest durch 6 teilbar ist.

Aufgabe 11

Beweise: In einem konvexen n-Eck beträgt die Anzahl der Diagonalen

$$D(n) = \frac{n(n-3)}{2}.$$