Mathematische Beweise

1 Aussagenlogik

Aussagen

In der Logik wird ein Satz (Proposition), dem eindeutig ein *Wahrheitswert* (wahr=1 oder falsch=0) zugeordnet werden kann, als *Aussage* bezeichnet.

Dabei spielt es keine Rolle, ob die Frage nach dem Wahrheitswert überhaupt beantwortet werden kann. Es genügt, dass eine eindeutige Zuordnung möglich ist.

Beispiel

- 7 ist eine Primzahl. Aussage (wahr)
- Wohin gehst du? keine Aussage (Frage)
- 8 ist kleiner als 3 Aussage (falsch)
- Kauf dieses Buch! keine Aussage (Befehl)
- Es gibt Leben ausserhalb unseres Sonnensystems. Aussage (?)
- $x = 3$ keine Aussage (hängt vom Wert von x ab)
- Dieser Satz ist falsch. keine Aussage (da wahr *&* falsch)

Logische Operatoren

Logische Operatoren erlauben es, aus bestehenden Aussagen neue zu bilden.

Name	sprachlich	Symbol
Negation	nicht	$\neg$
Konjunktion	und	$\wedge$
Disjunktion	oder	$\vee$
Implikation	wenn, ... dann	$\rightarrow$
Äquivalenz	genau dann ..., wenn	$\leftrightarrow$

Achtung: Das logische „oder" ist kein „entweder oder".

Warnung

Im Gegensatz zur Aussagenlogik können in der natürlichen Sprache Konjunktionen wie *„und"* und *„dann"* zusätzliche Bedeutungen haben.

- „Ich gehe nach Hause und mache meine Hausaufgaben."
- „Wenn es schön ist, dann gehe ich wandern."

In der Aussagenlogik spielen diese zusätzlichen Bedeutungen jedoch keine Rolle, was verwirrend sein kann.

Die logischen Operatoren lassen sich durch Wahrheitstabellen definieren.

Im Folgenden werden die Platzhalter p, q, r, $\ldots$ für *atomare Aussagen* verwendet; das sind Aussagen die nicht aus anderen Aussagen zusammengesetzt sind.

Negation

$\neg p$ ist genau dann wahr, wenn p *nicht* wahr (also falsch) ist.

p	$\neg p$
1	0
0	1

Konjunktion

$p \wedge q$ ist genau dann wahr, wenn p *und* q wahr sind.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disjunktion (Alternative)

$p \vee q$ ist genau dann wahr, wenn p *oder* q wahr sind, wobei „oder" im nichtausschliessenden Sinne gemeint ist.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Implikation (Konditional)

$p \rightarrow q$ ist genau dann falsch, wenn aus einer wahren Aussage p eine falsche Aussage q folgt.

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

In $p \rightarrow q$ heisst

- p: *Prämisse*, *Voraussetzung*, *Hypothese*, *Antezedent*

- q: *Folgerung*, *Konsequenz*

Eine Auswahl von Sprechweisen:

- Wenn p, dann q.
- q folgt aus p.
- Aus p folgt q.
- p ist hinreichend für q.
- q ist notwendig für p.

Bemerkung

Wen es irritiert, dass es logisch korrekt sein soll, von einer falschen Aussage auf eine wahre (oder eine falsche) zu schliessen, kann sich mit folgender Begründung „trösten“:

Da wir ein logisches Gebilde, wie das der Mathematik, auf wahren Aussagen aufgebaut werden soll, sind für uns nur die ersten zwei Zeilen der obigen Wahrheitstabelle von Bedeutung. Somit kann es uns egal sein, was wir aus einer falschen Aussage folgern.

Äquivalenz

$p \leftrightarrow q$ ist genau dann wahr, wenn $p \to q$ und $q \to p$ wahr sind.

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Eine Auswahl von Sprechweisen:

- p genau dann wenn q.
- p ist äquivalent zu q.
- p ist notwendig und hinreichend für q.

1.1 Die Syntax aussagenlogischer Formeln

Aus atomaren Aussagen können induktiv alle *aussagenlogischen Formeln* definiert werden:

(1) Jede atomare Aussage ist eine Formel.

(2) Ist A eine Formel, so ist, auch $\neg A$ eine Formel.

(3) Sind A und B Formeln, so sind auch $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ und $(A \leftrightarrow B)$ Formeln.

Damit können wir für eine gegebene Zeichenfolge in endlich vielen Schritten feststellen, ob sie eine Formel ist oder nicht.

Beispiel

(a) $((p \wedge q) \vee (\neg(q \rightarrow r)) \leftrightarrow q)$

Formel

(b) $((p \leftrightarrow q) \vee (\rightarrow (q \wedge r)) \vee q)$

keine Formel, denn vor „$\rightarrow$“ fehlt ein 2. Operand

Präzedenz (Vorrang)

Um Klammern zu vermeiden, ist die folgende Hierarchie der Operatoren üblich:

1. Klammern [()]
2. Negation [$\neg$]
3. Konjuktion [$\wedge$]
4. Disjuktion [$\vee$]
5. Implikation [$\rightarrow$]
6. Äquivalenz [$\leftrightarrow$]

Manchmal empfiehlt es sich aber, der Klarheit wegen, redundante („überflüssige“) Klammern zu setzen.

Beispiel

(a) $p \wedge q \Rightarrow r$ bedeutet:

$(p \wedge q) \Rightarrow r$

(b) $p \leftrightarrow \neg q \vee r \rightarrow s \wedge p$ bedeutet:

$p \leftrightarrow (((\neg q) \vee r) \rightarrow (s \wedge p))$

Bei separat stehenden Formeln können die äusseren Klammern weggelassen werden.

1.2 Die Semantik aussagenlogischer Formeln

Belegung und Interpretation

Eine *Belegung* ist eine Funktion b, die jeder atomaren Aussage eindeutig den Wert 0 oder 1 zuweist.

Ist b eine Belegung, so lässt sich jeder aussagenlogischen Formel in natürlicher Weise ein Wahrheitswert zuorden. Diese Zuordnung wird *Interpretation einer aussagenlogischen Formel* genannt.

Ist eine Formel A für eine Belegung b wahr, so drückt man dies durch $b \models A$ aus und sagt: „b erfüllt A“ oder “b macht A wahr“.

Enthält ein logischer Ausdruck n atomare Aussagen, so gibt es 2^n Belegungen, die man (zumindest für kleine n) vollständig mit Hilfe einer Wahrheitstabelle interpretieren kann.

Beispiel

Gegeben sind:

- die atomaren Aussagen p, q und r
- die Formel $(p \rightarrow (q \wedge r)) \vee p$
- die Belegung b mit $b(p) = 1$, $b(q) = 0$ und $b(r) = 1$

Interpretation:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$(p \rightarrow (q \wedge r)) \vee p$
1	0	1	0	0	1

Ob Teilausdrücke separat ausgewertet werden, hängt von der Komplexität des Ausdrucks ab. Hier kann man das Endresultat durch „Kurzschliessen“ von $\vee$ sogar direkt erkennen. Es ist auch üblich, Zwischenresultate unter die Operatoren zu schreiben und das Schlussresultat mit einem Stern oder anderweitig zu kennzeichnen.

Tautologie

Eine *Tautologie* ist ein logischer Ausdruck A, der immer wahr ist.

Beispiel

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1

Kontradiktion (Widerspruch)

Eine *Kontradiktion* ist ein logischer Ausdruck, der immer falsch ist.

Beispiel

Die Formel $p \wedge \neg p$ ist unerfüllbar.

p	$\neg p$	$\neg p \wedge p$
0	1	0
1	0	0

Kontingenz (Erfüllbarkeit)

Ein Formel ist *kontingent* (erfüllbar), wenn es mindestens eine Belegung gibt, für die der Ausdruck wahr wird.

Beispiel

Die Formel $\neg p \vee q$ ist erfüllbar:

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1

Folgerung und Äquivalenz

Eine Formel B folgt aus einer Formel A, wenn alle Belegungen, die A erfüllen, auch B erfüllen. In Symbolen: $A \Rightarrow B$ (oder $A \models B$)

Eine Formel B ist äquivalent zu einer Formel A, wenn $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$. In Symbolen: $A \Leftrightarrow B$ (oder $A \equiv B$)

$\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ werden *metasprachliche Implikation* bzw. *metasprachliche Äquivalenz* genannt, da es sich um Aussagen über Aussagen handelt.

Logische Äquivalenzen (1)

Im Folgenden bezeichnen A, B und C (atomare) Formeln.

$$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$$
$$A \vee 0 \Leftrightarrow A$$
$$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$$
$$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$$
$$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$$
$$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$$
$$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$$

Logische Äquivalenzen (2)

$A \vee A \Leftrightarrow A$	Idempotenz von $\vee$
$A \wedge A \Leftrightarrow A$	Idempotenz von $\wedge$
$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	Kommutativität von $\vee$
$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	Kommutativität von $\wedge$
$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$	Assoziativität von $\vee$
$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C)$	Assoziativität von $\wedge$
$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$	Gesetze von deMorgan
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$	Gesetze von deMorgan
$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributivgesetz für $\wedge$ über $\vee$
$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivgesetz für $\vee$ über $\wedge$

Logische Äquivalenzen (3)

$(A \to B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$	Implikation
$(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \to B) \wedge (B \to A)]$	Äquivalenz
$[(A \to B) \wedge (A \to \neg B)] \to \neg A$	Widerspruch
$(A \to B) \Leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$	Kontraposition

Schlussschema

Ein *Schlussschema* besteht aus einer Menge von Formeln $A_1, A_2, \ldots, A_n$(*Prämissen*), die als wahr vorausgesetzt werden und einer weiteren Formel B (*die Konklusion*), deren Wahrheit aus der Wahrheit der Prämissen folgen soll.

$$\begin{array}{ll} & A_1 \\ & A_2 \\ & \ldots \\ & A_n \\ \hline \therefore & B \end{array}$$

Ein Schlussschema ist *gültig*, wenn die Implikation $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ eine Tautologie ist.

Beispiel

Abtrennungsgesetz oder *Modus Ponens*:

$$\begin{array}{ll} & A \to B \\ & A \\ \hline \therefore & B \end{array}$$

Beweis der Gültigkeit:

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \wedge A$	$[(A \to B) \wedge A] \to B$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Tautologie; also gültiges Schlussschema

Beispiel

Kettenregel oder *hypothetischer Syllogismus*:

$$\begin{array}{ll} & A \to B \\ & B \to C \\ \hline \therefore & A \to C \end{array}$$

Beweis der Gültigkeit:

A	B	C	$\overbrace{A \to B}^{X}$	$\overbrace{B \to C}^{Y}$	$\overbrace{A \to C}^{Z}$	$(X \wedge Y) \to Z$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

Tautologie; also gültiges Schlussschema

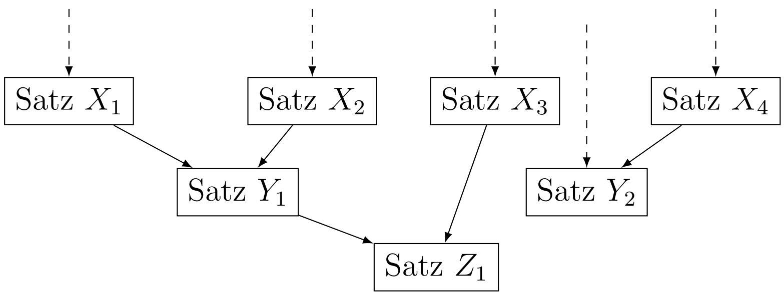
2 Prädikatenlogik

fehlt noch

3 Beweisverfahren

Mathematischer Beweis

Ein mathematischer Beweis ist die Verifikation einer Aussage durch eine Kette logischer Ableitungen aus einer Menge von Axiomen.



Das Problem: Worauf soll man diese Beweiskette aufbauen?

Ein *Axiom* ist ein Satz einer Theorie, der nicht von anderen Sätzen abgeleitet wird.

In der Mathematik handelt es sich dabei um fundamentale Sachverhalte, die als gültig vorausgesetzt werden oder sich empirisch beweisen lassen.

Beispiele:

- Axiome der Geometrie (Parallelenaxiom)
- Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Sollte sich erweisen, dass ein Axiom logisch aus den anderen Axiomen bzw. aus den daraus abgeleiteten Sätzen ergibt, so ist es als Axiom überflüssig und kann als Satz betrachtet werden.

3.1 Der direkte Beweis

Beim direkten Beweis zeigt man, ausgehend von der Voraussetzung (Prämisse) A mit Hilfe endlich vieler logisch korrekter Schlüsse, dass daraus die Behauptung (Konklusion) folgt.

Beispiel 3.1

Satz: Ist $n \in \mathbb{N}$ und n gerade, dann ist n^2 gerade.

Beweis: Ist $n \in \mathbb{N}$ gerade, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k$.

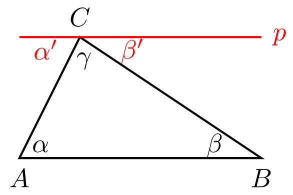
$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ [aufgrund bewiesener Rechenregeln]

Also ist n^2 durch 2 teilbar und somit gerade. $\square$

Beispiel 3.2

Satz: Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt 180°.

Beweis:



$AB \parallel C \to p$

$\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ (Z-Winkel)

$\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma = 180°$ (gestreckter Winkel) $\square$

Beispiel 3.3

Satz: Für drei ganze Zahlen a, b und c gilt:

$a \mid b,\ a \mid c \quad \to \quad a \mid (b + c)$

Beweis:

$a \mid b$ bedeutet, dass es $r \in \mathbb{Z}$ gibt mit $b = r \cdot a$

$a \mid c$ bedeutet, dass es $s \in \mathbb{Z}$ gibt mit $c = s \cdot a$

Damit gilt:

$b + c = r \cdot a + s \cdot a = (r + s)a$

was bedeutet, dass $b + c$ durch a teilbar ist. $\square$

Beispiel 3.4

Für alle $a,\ b \in \mathbb{R}_0^+$ gilt: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Beweis:

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 &\geq 0 \\
a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0 \quad || + 4ab \\
a^2 + 2ab + b^2 &\geq 4ab \\
(a+b)^2 &\geq 4ab \quad ||\sqrt{\ldots} \\
a + b &\geq 2\sqrt{ab} \quad || : 2 \\
\frac{a+b}{2} &\geq 2
\end{aligned}$$

$\square$

3.2 Der indirekte Beweis (Beweis durch Widerspruch)

Beim indirekten Beweis einer Aussage $(A \to B)$ geht man so vor:

(a) Man nimmt an, dass die Behauptung falsch sei. ($\neg B$)

(b) In endlich vielen, logisch korrekten Schlüssen wird aus $\neg B$ ein Wiederspruch zur Voraussetzung A oder zu einer bereits als wahr erkannten Aussage C gewonnen.

(c) Da A und $\neg A$ (oder C und $\neg C$) nicht gleichzeitig wahr sein können, muss dies daran liegen, dass wir $\neg B$ als wahr vorausgesetzt haben. Dieser Widerspruch lässt sich nur dadurch auflösen, dass B wahr ist.

Beispiel 3.5

Aussage: Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis: Annahme: Die Zahl $\sqrt{2}$ sei rational.
Dann gibt es teilerfremde Zahlen p, $q \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2} = p/q$
$\Rightarrow 2 = p^2/q^2$
$\Rightarrow 2q^2 = p^2$
$\Rightarrow p^2$ ist gerade
$\Rightarrow p$ ist gerade (Beispiel 3.1)
$\Rightarrow$ es gibt ein $j \in \mathbb{N}$ mit $p = 2j$
$\Rightarrow 2q^2 = (2j)^2 = 4j^2$
$\Rightarrow q^2 = 2j$
$\Rightarrow q$ ist gerade (Beispiel 3.1)
$\Rightarrow$ es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $p = 2k$
$\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2j}{2k} = \frac{j}{k}$
Dies ist ein Widerspruch zur Teilerfremdheit von p und q.
Also ist die Annahme falsch und die Behauptung richtig.

□

Beispiel 3.6

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis: Annahme: es gibt endlich viele Primzahlen $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$

Setze $q = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ $(*)$

$\Rightarrow q$ ist prim, denn wegen $(*)$ ist q durch keine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ teilbar [es ergibt immer den Rest 1]

$\Rightarrow p_n < q$ nach Konstruktion von q in $(*)$

Dies steht im Widerspruch zur Maximalität von p_n

Also ist die Annahme falsch und die Behauptung wahr.

3.3 Der Beweis durch ein Gegenbeispiel

Es ist oft schwierig zu beweisen, dass es etwas nicht gibt oder dass eine Eigenschaft nicht für alle Elemente einer Menge gilt.

In solchen Fällen ist es oft einfacher, ein sogenanntes *Gegenbeispiel* zu finden, das die Behauptung widerlegt.

Beispiel 3.7

Beweise oder widerlege: Jede natürliche Zahl mit einer geraden Quersumme ist durch 2 teilbar.

Die Behauptung ist falsch, denn die Zahl ungerade Zahl 11 hat die Quersumme 2.

4 Vollständige Induktion

Die *vollständige Induktion* ist ein Beweisverfahren für Aussagen, die von natürlichen Zahlen abhängig sind.

Beispiel 4.8

$A(n)$: Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ist n^2.

$$\begin{aligned} &A(1)\colon 1 = 1^2 \\ &A(2)\colon 1+3 = 2^2 \\ &A(3)\colon 1+3+5 = 3^2 \\ &\quad \ldots \end{aligned}$$

Ein Mathematiker gibt sich nicht damit zufrieden, wenn die ersten n Formeln gültig sind. Es könnte ja sein, dass die $(n+1)$-te Formel falsch ist.

Andererseits ist es nicht möglich, unendlich viele Formeln nachzuprüfen. In einer solchen Situation kommt die vollständige Induktion zur Anwendung.

Beweise, dass die Aussageform

$A(n)$: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gültig ist.

Teil 1: Induktionsverankerung

Bestimme das kleinste $n \in \mathbb{N}$ für das $A(n)$ wahr ist.

$n = 1$: $1 = 1^2$ wahr

Teil 2: Induktionsschritt

Dieser Teil besteht selbst aus zwei Abschnitten:

- Halte fest, dass die Aussageform für den in der Verankerung gefundenen Wert n_0 und potenziell für $n \geq n_0$ gültig ist.

  $A(n)$ sei wahr für ein $n \geq 1$. *Induktionshypothese*

- Leite die Gültigkeit von $A(n+1)$ aus der Gültigkeit von $A(n)$ her:

  $$1 + 3 + \ldots + (2n-1) + (2n+1) \overset{\text{IH}}{=} n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$$

Aus Teil 1 und Teil 2 folgt: $A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Beispiel 4.9

Beweise die Aussageform

$A(n)$: $2^n < n!$

mit vollständiger Induktion.

Induktionsverankerung

$n = 1$: $2^1 = 2 < 1 = 1!$ falsch

$n = 2$: $2^2 = 4 < 2 = 2!$ falsch

$n = 3$: $2^3 = 8 < 6 = 3!$ falsch

$n = 4$: $2^4 = 16 < 24 = 4!$ richtig

$n = 5$: $2^5 = 32 < 120 = 5!$ richtig

Induktionsschritt

- $A(n)$ sei wahr für $n \geq 4$. (IH)
- $2^{n+1} < 2^n \cdot 2^1 \overset{\text{IH}}{<} n! \cdot 2 \overset{\text{IH}}{<} n! \cdot (n+1) < (n+1)!$

$A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 4.10

Beweise mit vollständiger Induktion die Aussageform

$A(n)$: $6 \mid (n^3 - n)$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Das Symbol „$a \mid b$" [lies „a teilt b"] bedeutet hier, dass die ganze Zahl a ohne Rest in der ganzen Zahl b enthalten ist.

Verankerung

$n = 1$: $6 \mid \underbrace{(1^3 - 1)}_{0}$ wahr

Induktionsschritt

- $A(n)$ sei wahr für ein $n \geq 1$.

- $$\begin{aligned}(n+1)^3-(n+1) &= (n^3+3n^2+3n+1)-(n+1)\\ &= n^3+3n^2+3n-n\\ &= (n^3-n)+3(n^2+n)\\ &= \underbrace{\underbrace{(n^3-n)}_{\text{durch 6 teilbar}} + \underbrace{3n(n+1)}_{\text{durch 6 teilbar}}}_{\text{durch 6 teilbar}}\end{aligned}$$

$A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Beispiel 4.11

Beweise mit vollständiger Induktion, dass die Aussageform

$A(n)$: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

Verankerung

$n = 1$: $1 \cdot 2 = \dfrac{1(1+1)(1+2)}{3}$ wahr

Induktionsschritt

- $A(n)$ sei wahr für ein $n \geq 1$ (IH)
- $\underbrace{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1)} + (n+1)(n+2)$

$$\begin{aligned}&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)\\ &= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}\end{aligned}$$

$A(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ □

Beispiel 4.12

Von $A(n)$ ist folgendes bekannt:

- $A(1)$ und $A(20)$ sind wahr, $A(15)$ ist falsch.
- $A(n) \to A(n+1)$ gilt für $k \geq 12$

Was lässt sich über den Wahrheitsgehalt der folgenden Aussagen sagen?

(a) $A(2)$ unbestimmt

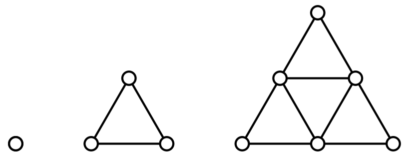
(b) $A(13)$ falsch

(c) $A(18)$ unbestimmt

(d) $A(24)$ wahr

Beispiel 4.13

Gesucht ist eine Formel für die Gesamtzahl aller Verbindungsstrecken S_n in der n-ten Figur.



$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$

Beweise diese Formel mit vollständiger Induktion.

Die Formel

$S_1 = 0$

$S_2 = 3 \cdot 1 = 3$

$S_3 = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9$

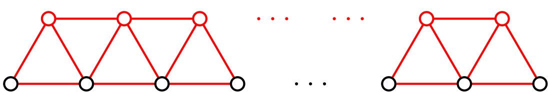
$S_4 = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 18$

$$S_n = 3(1 + 2 + \cdots + n - 1) = \frac{3n(n-1)}{2}$$

Induktionsverankerung

$A(1)$: $S_1 = 3 \cdot 0 = 0$ wahr

Induktionsschritt

- $A(n)$ sei wahr für ein $n \geq 1$. (IH)
- 

  unter jedem der unteren n Knoten in der Figur F_n befindet sich ein Dreieck mit drei Seiten, was insgesamt $3n$ zusätzliche Kanten bedeutet.

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + 3n \overset{\text{IH}}{=} \frac{3n(n-1)}{2} + 3n = \frac{3n(n-1)+6n}{2} \\
&= \frac{3n^2-3n+6n}{2} = \frac{3n^2+3n}{2} + 3n = \frac{3n(n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

$A(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ $\square$