Aufgabe 1

(a)
- $a_1 = 1$
- $a_2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$
- $a_3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{9}{6}$
- $a_4 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{16}{10}$

(b) Vermutung: $a_n = \frac{n^2}{n(n+1)/2} = \frac{2n}{n+1}$

(c) Beweis von $A(n)$: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)/2} = \frac{2n}{n+1}$

Induktionsanfang: $A(1)$ gilt (siehe oben)

Induktionsschritt:

- Induktionshypothese (IH): $A(n)$ sei wahr für $n \geq 1$
- $n \rightarrow n+1$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)/2} + \frac{1}{(n+1)(n+2)/2}$$

$$\overset{\text{IH}}{=} \frac{2n}{n+1} + \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n(n+2)+2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{2n^2+4n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2(n^2+2n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{2(n+1)}{n+2}$$

$\square$

Aufgabe 2

A	B	(	A	$\rightarrow$	B	)	$\leftrightarrow$	(	$\neg$	A	$\vee$	B	)
1	1		1	1	1		**1**		0	1	1	1	
1	0		1	0	0		**1**		0	1	0	0	
0	1		0	1	1		**1**		1	0	1	1	
0	0		0	1	0		**1**		1	0	1	0	

Aufgabe 3

- $n = 1$: $1^3 - 1 = 0$ durch 6 teilbar
- $n = 2$: $2^3 - 2 = 6$ durch 6 teilbar
- $n = 3$: $3^3 - 3 = 24$ durch 6 teilbar
- $n = 4$: $4^3 - 4 = 60$ durch 6 teilbar

Vermutung $A(n)$: $6 \mid (n^3 - n)$

(a) Induktionsanfang: $A(1)$ gilt (siehe oben)

(b) Induktionsschritt:
IH: $A(n)$ sei wahr für $n \geq 1$

$n \to n + 1$:

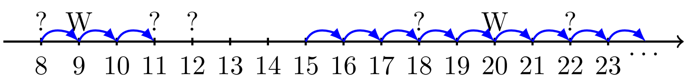
$$\begin{aligned}
&(n+1)^3 - (n+1) \\
&= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\
&= (n^3 - n) + 3n^2 + 3n = \underbrace{(n^3 - n)}_{(1)} + \underbrace{3n(n+1)}_{(2)}
\end{aligned}$$

IV: (1) ist durch 6 teilbar

$3n(n + 1)$ ist durch 3 und 2; also durch 6 teilbar

Also ist die ganze Summe rechts durch 6 teilbar. $\square$

Aufgabe 4



$A(8)$: unbestimmt

$A(11)$: W

$A(12)$: F

$A(18)$: unbestimmt

$A(22)$: W

Aufgabe 5

$A(n)$: $8 \mid (5^{2n} - 3^{2n})$
(a) Induktionsverankerung:

$n = 0$: $5^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$ ist durch 8 teilbar

(b) Induktionsschritt:

IH: $A(n)$ sei wahr für $n \geq 0$

$n \to n+1$:

$$5^{2(n+1)} - 3^{2(n+1)} = 5^{2n+2} - 3^{2n+2} = 5^2 \cdot 5^{2n} - 3^2 \cdot 3^{2n}$$

$$= 25 \cdot 5^{2n} - 9 \cdot 3^{2n} = 25 \cdot 5^{2n} - 9 \cdot 3^{2n} - 16 \cdot 3^{2n} + 16 \cdot 3^{2n}$$

$$= 25 \cdot 5^{2n} - 25 \cdot 3^{2n} + 16 \cdot 3^{2n} = \underbrace{25\left(5^{2n} - 3^{2n}\right)}_{p} + \underbrace{16 \cdot 3^{2n}}_{q}$$

$8 \mid p$ (wegen IH) und $8 \mid q \quad \Rightarrow \quad 8 \mid (p+q)$ $\square$

Aufgabe 6

(a) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{3}{4}$, $a_4 = \frac{4}{5}$

(b) $A(n)$: $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

(c) (a) Induktionsanfang:

$n = 1$: $\dfrac{1}{1 \cdot 2} = \dfrac{1}{1+1}$ (ok)

(b) Induktionsschritt:

IH: Sei $A(n)$ wahr für $n \geq 1$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\stackrel{\text{IH}}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

$\square$

Aufgabe 7

$A(n)$: $4^1 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot \ldots \cdot 4^n = 2^{n(n+1)}$

(a) Induktionsanfang: $A(1)$: $4^1 = 4 = 2^{1 \cdot (1+1)}$ (ok)

(b) Induktionsschritt:

IH: $A(n)$ sei wahr für $n \geq 1$

$n \to n+1$:

$4^1 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot \ldots \cdot 4^n \cdot 4^{n+1} \overset{\text{IH}}{=} 2^{n(n+1)} \cdot 4^{n+1} = 2^{n(n+1)} \cdot 2^{2(n+1)}$

$= 2^{n(n+1)+2(n+1)} = 2^{(n+2)(n+1)}$

$\square$

Aufgabe 8

(a) Induktionsanfang:

$n = 0$: $q^0 = 1 = \dfrac{q^{0+1} - 1}{q - 1}$ (ok)

(b) Induktionsschritt:

IH: $A(n)$ sei wahr für $n \geq 0$

$n \to n + 1$:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1} \overset{\text{IH}}{=} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1}$$

$$= \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + \frac{q^{n+1}(q - 1)}{q - 1} = \frac{q^{n+1} - 1 + q^{n+1} \cdot q - q^{n+1}}{q - 1}$$

$$= \frac{q^{n+1} \cdot q^1 - 1}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}$$

$\square$

Aufgabe 9

- $a_1 = \dfrac{1}{4}$
- $a_2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{28} = \dfrac{2}{7}$
- $a_3 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{28} + \dfrac{1}{70} = \dfrac{3}{10}$
- $a_4 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{28} + \dfrac{1}{70} + \dfrac{1}{130} = \dfrac{4}{13}$

explizit: $a_n = \dfrac{n}{3n + 1}$

Aufgabe 10

Prämisse: $n \in \mathbb{N}$ und n^2 gerade

Konklusion: n^2 ist gerade

Beweis:

Annahme: $n \in \mathbb{N}$ sei ungerade.

Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 2k + 1$

$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 2k + 1$

Also ist n^2 ungerade

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass n^2 gerade ist.

Also ist die Annahme falsch und n muss gerade sein. $\square$

Aufgabe 11

(a) $(P \to Q) \to (Q \to P)$

Die Aussage ist genau dann falsch, wenn es eine Belegung von P und Q gibt, für die $P \to Q$ wahr und $Q \to P$ falsch ist. Dies für die Belegung $P = \texttt{FALSCH}$ und $Q = \texttt{WAHR}$ der Fall.

$\Rightarrow$ keine Tautologie

(b) $((P \vee Q) \to R) \vee (\neg(P \vee Q) \to R)$

Es genügt zu zeigen, dass die linke und rechte Seite der mittleren Disjunktion ($\vee$) nicht gleichzeitig falsch sein können.

Die linke Seite ist falsch, wenn $P \vee Q$ wahr und R falsch ist. Dies ergibt die drei Belegungen

P	Q	R
W	W	F
W	F	F
F	W	F

die man auf der rechten Seite der Disjunktion testen muss. Eine Wahrheitstabelle für diese drei Fälle zeigt, dass sich daraus immer eine wahre Aussage ergibt.

$\Rightarrow$ Tautologie

(c) $(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow ((P \to Q) \to R)$

Belegt man $P = Q = R = \texttt{FALSCH}$, so hat die linke Seite der Äquivalenz den Wahrheitswert $\texttt{WAHR}$ und die rechte Seite den Wahrheitswert $\texttt{FALSCH}$.

$\Rightarrow$ keine Tautologie

Aufgabe 12

- Induktionsanfang ($n = 1$):

  $$1 + x = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 1 + x \text{ (ok)}$$

- Induktionsschritt:
  - Induktionshypothese: $A(n)$ sei wahr für $n \geq 1$
  - $n \to n + 1$:

$$- \quad 1 + x + \cdots + x^n + x^{n+1} \stackrel{\text{IH}}{=} \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + x^{n+1} = \frac{x^{n+1} - 1 + (x-1)x^{n+1}}{x - 1}$$

$$= \frac{x^{n+1} - 1 + x^{n+2} - x^{n+1}}{x - 1} = \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}$$