Aufgabe 1

$$a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)/2}$$

(a) Berechne einige Glieder der Folge (a_n)

(b) Suche nach einer expliziten Formel für a_n

(c) Beweise die Formel durch vollständige Induktion

Aufgabe 2

Zeige, dass der Ausdruck $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$ allgemein gültig ist.

Aufgabe 3

Beweise oder widerlege: $n^3 - n$ ist durch 6 teilbar

Aufgabe 4

Von einer Aussageform $A(n)$ ist folgendes bekannt:

- $A(9)$ und $A(20)$ sind wahr.
- $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ gilt nur für $8 \leq k \leq 10$ und für $k \geq 15$.

Was lässt sich über $A(8)$, $A(11)$, $A(12)$, $A(18)$ und $A(22)$ sagen?

Aufgabe 5

Beweise mit vollständiger Induktion: $5^{2n} - 3^{2n}$ ist durch 8 teilbar.

Aufgabe 6

Die Zahlenfolge (a_n) ist wie folgt definiert.

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

(a) Berechne a_1, a_2, a_3 und a_4

(b) Äussere eine Vermutung, wie a_n direkt, d. h. ohne die Berechnung einer Summe bestimmt werden kann.

(c) Beweise diese Vermutung mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 7

Beweise mit vollständiger Induktion:

$4^1 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot \ldots \cdot 4^n = 2^{n(n+1)}$

Aufgabe 8

Beweise mit vollständiger Induktion:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \qquad (\text{für } q \neq 1)$$

Aufgabe 9

Berechne einige Glieder der Folge

$$a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{70} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

und bestimme eine explizite Definition für a_n. (ohne Beweis)

Aufgabe 10

Wie lauten Prämisse und Konklusion des folgenden mathematischen Satzes:

Ist $n \in \mathbb{N}$ und n^2 gerade, dann ist auch n gerade.

Beweise diesen Satz indirekt.

Aufgabe 11

Es seien P, Q und R Aussagen. Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien?

(a) $(P \to Q) \to (Q \to P)$

(b) $((P \vee Q) \to R) \vee (\neg(P \vee Q) \to R)$

(c) $(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow ((P \to Q) \to R)$

Es müssen keine vollständigen Wahrheitstabellen gebildet werden. Gib an, welche Fälle für die Beantwortung der Frage ausreichend sind und teste diese durch.

Aufgabe 12

Beweise die folgende Aussage durch vollständige Induktion

Für alle $n \geq 1$ und $x \neq 1$ gilt: $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$