

---

**Quadratwurzeln**  
**Theorie (L)**

---

# Inhaltsverzeichnis

1	Definition, Begriffe und Berechnung	3
2	Rechenregeln	5
3	Die Normalform	7
4	Wurzelterme mit Variablen	8
5	Lineare Gleichungen mit Wurzelkoeffizienten	9
6	Quadrierte Gleichungen	11
7	Wurzelgleichungen	12

# 1 Definition, Begriffe und Berechnung

## Definition

Für eine nichtnegative Zahl  $a$  ist  $b = \sqrt{a}$  die nichtnegative Zahl mit der Eigenschaft  $b^2 = a$ .

- $a$ : Radikand
- $b$ : (Quadrat)Wurzel aus  $a$
- Wurzelziehen: Radizieren

Um  $\sqrt{9}$  zu berechnen, suchen wir die Zahlen, deren Quadrat 9 ergeben. Dafür kommen  $+3$  und  $-3$  in Frage. Da es laut Definition die *nichtnegative* Zahl sein soll, gilt  $\sqrt{9} = 3$ .

## Kopfrechnen

Lerne die folgenden Quadratzahlen auswendig. Sie sind eine wichtige Grundlage für das Rechnen mit Quadratwurzeln.

$0^2$	0	$7^2$	49	$14^2$	196	$21^2$	441
$1^2$	1	$8^2$	64	$15^2$	225	$22^2$	484
$2^2$	4	$9^2$	81	$16^2$	256	$23^2$	529
$3^2$	9	$10^2$	100	$17^2$	289	$24^2$	576
$4^2$	16	$11^2$	121	$18^2$	324	$25^2$	625
$5^2$	25	$12^2$	144	$19^2$	361	$26^2$	676
$6^2$	36	$13^2$	169	$20^2$	400	$27^2$	729

**Zu welchem Zahlenbereichen gehören die Quadratwurzeln?**

$$\sqrt{49} = 7 \in \mathbb{N}_0$$

natürliche Zahl

$$\sqrt{9/4} = 3/2 = 1.5 \in \mathbb{Q}$$

rationale Zahl mit abbrechender Dezimaldarstellung

$$\sqrt{4/9} = 2/3 = 0.\overline{66} \in \mathbb{Q}$$

rationale Zahl mit nichtabbrechender periodischer Dezimaldarstellung

$$\sqrt{2} = 1.41421\dots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

irrationale Zahl mit nichtabbrechender aperiodischer Dezimaldarstellung

## Stellenzahl der Quadratwurzel

Wie lässt sich aus der Stellenzahl des Radikanden die Stellenzahl einer Quadratwurzel bestimmen, wenn diese eine endliche Dezimaldarstellung hat?

$$\sqrt{17\,935\,225} = 4235 \quad 8\text{VKS} \rightarrow 4\text{VKS}$$

$$\sqrt{502.432225} = 22.415 \quad 3\text{VKS} \rightarrow 2\text{VKS}, 6\text{NKS} \rightarrow 3\text{NKS}$$

$$\sqrt{214\,526.4489} = 463.17 \quad 6\text{VKS} \rightarrow 3\text{VKS}, 4\text{NKS} \rightarrow 2\text{NKS}$$

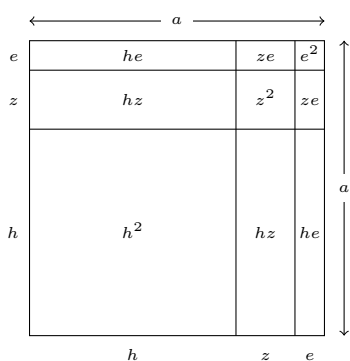
$$\sqrt{0.0074545956} = 0.08634 \quad 10\text{NKS} \rightarrow 5\text{NKS}$$

Vorkommastellen (VKS): **halbieren und aufrunden**

Nachkomastellen (NKS): **halbieren**

## Schriftliches Wurzelziehen

$\sqrt{a}$  kann durch fortlaufendes Ausschöpfen von  $a$  bestimmt werden. Bei jedem Schritt sind weitere Mischprodukte zu berücksichtigen.



$$a^2 = h^2 + (2hz + z^2) + (2he + 2ze + e^2) = h^2 + (2h + z)z + (2h + 2z + e)e$$

### Beispiel 1.1

$$\sqrt{116\,281} = ?$$

Teile die Ziffern des Radikanden von rechts in Zweiergruppen auf.

$$\begin{array}{r} 11\ 62\ 81 = (300 + 40 + 1)^2 = 341^2 \\ - \quad 9 \downarrow \downarrow \\ \quad 2\ 62 \\ - \quad 2\ 56 \quad (2 \cdot 30 + 4) \cdot 4 \\ \quad \quad 6\ 81 \\ - \quad \quad 6\ 81 \quad (2 \cdot 300 + 2 \cdot 40 + 1) \cdot 1 \\ \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$\sqrt{116\,281} = 341$$

## Das Verfahren von Heron (babylonisches Wurzelziehen)

Gegeben: Radikand  $a$ , Mindestgenauigkeit  $\varepsilon$  und Startwert  $x$

Gesucht: Näherungslösung für  $\sqrt{a}$

(1) Berechne  $\frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right) \rightarrow x'$ . (Durchschnitt von  $x$  und  $\frac{a}{x}$ )

(2) Ist  $|x - x'| < \varepsilon$ ?

(2.1) *Ja*: Gehe zu (3).

(2.2) *Nein*: Setze  $x' \rightarrow x$  und gehe zu (1).

(3) Gib  $x'$  als Näherungslösung aus. (Ende)

Begründung:  $x'$  und  $\sqrt{a}$  liegen immer zwischen  $x$  und  $\frac{a}{x}$ .

### Beispiel 1.2

$\sqrt{6} = ?$ , Genauigkeit  $\varepsilon = 0.1$ , Startwert  $x = 3$

(1)  $\frac{1}{2} \left( 3 + \frac{6}{3} \right) = \frac{5}{2} \rightarrow x'$

(2)  $|x - x'| = \left| 3 - \frac{5}{2} \right| = \frac{1}{2} = 0.5 < 0.1$ ? Nein  $\Rightarrow \frac{5}{2} \rightarrow x$

(1)  $\frac{1}{2} \left( \frac{5}{2} + \frac{6}{5/2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{5}{2} + \frac{12}{5} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{49}{10} = \frac{49}{20} \rightarrow x'$

(2)  $|x - x'| = \left| \frac{5}{2} - \frac{49}{20} \right| = \frac{1}{20} = 0.05 < 0.1$ ? Ja

(3)  $\sqrt{6} \approx 49/20 = 2.45$  (cf.  $\sqrt{6} = 2.44948974\dots$ )

## 2 Rechenregeln

### Die Produktregel

$$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$$

*Behauptung*: Für  $a \geq 0$  und  $b \geq 0$  gilt:  $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

*Beweis*: Sind  $a \geq 0$  und  $b \geq 0$  so gibt es Zahlen  $x \geq 0$  und  $y \geq 0$  mit  $x^2 = a$  und  $y^2 = b$ .

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{x^2 \cdot y^2} = \sqrt{x \cdot x \cdot y \cdot y} \stackrel{\text{K}}{=} \sqrt{x \cdot y \cdot x \cdot y}$$

$$\stackrel{\text{A}}{=} \sqrt{(x \cdot y) \cdot (x \cdot y)} = \sqrt{(x \cdot y)^2} \stackrel{\text{D}}{=} x \cdot y \stackrel{\text{D}}{=} \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

(K: Kommutativgesetz, A: Assoziativgesetz, D: Definition der Quadratwurzel)

### Beispiel 2.1

$$\sqrt{160000} = \sqrt{16 \cdot 10000} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{10000} = 4 \cdot 100 = 400$$

### Beispiel 2.2

$$\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2} \quad (\text{teilweise Radizieren})$$

### Beispiel 2.3

$$\sqrt{10} \cdot \sqrt{2.5} = \sqrt{10 \cdot 2.5} = \sqrt{25} = 5$$

### Die Quotientenregel

$$\sqrt{100 : 25} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{100} : \sqrt{25} = 10 : 5 = 2$$

*Behauptung:* Für  $a \geq 0$  und  $b > 0$  gilt:  $\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$

*Beweis:* Sind  $a \geq 0$  und  $b > 0$  so gibt es Zahlen  $x \geq 0$  und  $y > 0$  mit  $x^2 = a$  und  $y^2 = b$ .

$$\sqrt{a : b} = \sqrt{x^2 : y^2} = \sqrt{(x \cdot x) : (y \cdot y)} = \sqrt{x \cdot x : y \cdot y}$$

$$\stackrel{\text{K}}{=} \sqrt{x : y \cdot x : y} \stackrel{\text{A}}{=} \sqrt{(x : y) \cdot (x : y)} = \sqrt{(x : y)^2}$$

$$\stackrel{\text{D}}{=} x : y \stackrel{\text{D}}{=} \sqrt{a} : \sqrt{b}$$

### Beispiel 2.4

$$\sqrt{0.000144} = \sqrt{\frac{144}{1000000}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{1000000}} = \frac{12}{1000} = 0.012$$

### Beispiel 2.5

$$\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{147}{3}} = \sqrt{49} = 7$$

### Die Potenzregel

$$\sqrt{2^6} = \sqrt{64} = 8$$

$$(\sqrt{2})^6 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

*Behauptung:* Für  $a \geq 0$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$

*Beweis:* Für  $a \geq 0$  und  $n \in \mathbb{N}$  folgt durch mehrfache Anwendung der Produktregel (P)

$$\sqrt{a^n} = \sqrt{a \cdot a \cdot \dots \cdot a} \stackrel{\text{P}}{=} \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \dots \cdot \sqrt{a} = (\sqrt{a})^n$$

### Beispiel 2.6

$$\sqrt{2^6} = (\sqrt{2})^6 = \underbrace{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}_2 \cdot \underbrace{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}_2 \cdot \underbrace{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}_2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

## 3 Die Normalform

Ist es möglich einen Wurzelterm in der Gestalt

$$q_0 + q_1\sqrt{n_1} + q_2\sqrt{n_2} + \dots$$

darzustellen, wobei  $q_0, q_1, q_2, \dots$  rationale Zahlen und  $n_1, n_2, \dots$  verschiedene quadratfreie natürliche Zahlen sind, so spricht man von *der Normalform* dieses Wurzelterms.

### Beispiel 3.1

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

### Beispiel 3.2

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \quad (\text{Nenner wurzelfrei machen})$$

### Beispiel 3.3

$$\sqrt{\frac{20}{7}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 5 \cdot 7}{7 \cdot 7}} = \sqrt{\frac{4}{49} \cdot 35} = \sqrt{\frac{4}{49}} \sqrt{35} = \frac{2}{7}\sqrt{35}$$

### Beispiel 3.4

$$\begin{aligned} \sqrt{75} + \sqrt{72} - \sqrt{27} + \sqrt{2} \\ &= \sqrt{25}\sqrt{3} + \sqrt{36}\sqrt{2} - \sqrt{9}\sqrt{3} + \sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{3} + 6\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{3} + 7\sqrt{2} \end{aligned}$$

### Beispiel 3.5

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$$

### Beispiel 3.6

$$\begin{aligned} \frac{1}{3 + \sqrt{2}} &\stackrel{\text{3BF}}{=} \frac{1 \cdot (3 - \sqrt{2})}{(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})} = \frac{3 - \sqrt{2}}{9 - 2} = \frac{3 - \sqrt{2}}{7} \\ &= \frac{3}{7} - \frac{1}{7}\sqrt{2} \end{aligned}$$

### Beispiel 3.7

$$\begin{aligned}\frac{1 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{5}} &\stackrel{\text{3BF}}{=} \frac{(1 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{5})}{(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})} = \frac{2 + \sqrt{5} - 2\sqrt{3} - \sqrt{15}}{4 - 5} \\ &= \frac{2 - 2\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{15}}{-1} = -2 + 2\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{15}\end{aligned}$$

### Beispiel 3.8

Ist die Aussage wahr oder falsch?

$$\sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{18} = \sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{27}$$

$$\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$$

$$3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} \quad \text{wahr}$$

### Beispiel 3.9

$$\sqrt{\sqrt{3}}$$

kann nicht auf Normalform gebracht werden, da der Radikand irrational ist.

## 4 Wurzelterme mit Variablen

Überprüfe den Wahrheitsgehalt der Aussageform

$$\sqrt{a^2} = a,$$

indem du ...

- $a$  durch 2 ersetzt:  $\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$  (wahr)
- $a$  durch  $-2$  ersetzt:  $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = -2$  (falsch)

Mit dem Symbol

$$|a| := \sqrt{a^2} \quad [\text{lies: „Betrag von } a\text{“}]$$

zeigen wir an, dass  $\sqrt{a^2}$  nichtnegativ ist, selbst wenn  $a < 0$  gilt.

### Beispiel 4.1

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

### Beispiel 4.2

$$\sqrt{z^3} = \sqrt{z^2 \cdot z} = \sqrt{z^2} \cdot \sqrt{z} = |z|\sqrt{z}$$



### Beispiel 4.3

$\sqrt{c^4} = c^2$  Warum braucht es hier keine Betragszeichen?  
 $c^2$  kann nicht negativ sein

### Beispiel 4.4

$$\sqrt{y^2 - 8y + 16} = \sqrt{(y - 4)^2} = |y - 4|$$

### Beispiel 4.5

$$\sqrt{m^2 + m^3} = \sqrt{m^2(1 + m)} = \sqrt{m^2}\sqrt{1 + m} = |m|\sqrt{1 + m}$$

### Beispiel 4.6

$$\begin{aligned}\sqrt{(x + y)^2 - (x - y)^2} &= \sqrt{x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2)} \\ &= \sqrt{4xy} = 2\sqrt{xy}\end{aligned}$$

## 5 Lineare Gleichungen mit Wurzelkoeffizienten

### Beispiel 5.1

$$x\sqrt{3} + \sqrt{2} = \sqrt{5} - x\sqrt{2} \quad || + x\sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$x\sqrt{3} + x\sqrt{2} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

$$x(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$x = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$$

$$x = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{10} - \sqrt{6} + 2}{3 - 2}$$

$$x = 2 - \sqrt{6} - \sqrt{10} + \sqrt{15}$$

### Beispiel 5.2

$$(\sqrt{2} - x)^2 = (4 - x)(3 - x)$$

$$2 - 2x\sqrt{2} + x^2 = 12 - 7x + x^2 \quad || -x^2$$

$$2 - 2x\sqrt{2} = 12 - 7x \quad || -2 + 7x$$

$$7x - 2x\sqrt{2} = 10$$

$$x(7 - 2\sqrt{2}) = 10$$

$$x = \frac{10}{7 - 2\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{10(7 + 2\sqrt{2})}{(7 - 2\sqrt{2})(7 + 2\sqrt{2})}$$

## 6 Quadrierte Gleichungen

Sind  $A$  und  $B$  zwei Polynome, so ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$A^2 = B^2$$

die Vereinigungsmenge der Lösungsmengen von

$$A = B \quad \text{und} \quad A = -B$$

### Beispiel 6.1

$$(x - 4)^2 = 144$$

$$x - 4 = 12 \quad \text{oder} \quad x - 4 = -12$$

$$x = 16 \qquad x = -8$$

### Beispiel 6.2

$$(2x - 12)^2 = (3x - 15)^2$$

$$2x - 12 = 3x - 15 \quad \text{oder} \quad 2x - 12 = -(3x - 15)$$

$$3 = x \qquad 2x - 12 = -3x + 15$$

$$x = 3 \qquad 5x = 27$$

$$x = \frac{27}{5}$$

## 7 Wurzelgleichungen

Eine Wurzelgleichung ist eine Gleichung, bei der die Unbekannte im Radikanden auftritt.

- $\sqrt{2x} + \sqrt{3x} = 5$  keine echte Wurzelgleichung
- $2\sqrt{x} + \sqrt{3x} = 5$  echte Wurzelgleichung

### Beispiel 7.1

$$\sqrt{2-x} = \sqrt{x-8} \quad ||^2 \quad (\text{Gewinnumformung})$$

$$2-x = x-8 \quad || +x+8$$

$$10 = 2x \quad || :2$$

$$x = 5$$

Probe L:  $\sqrt{2-5} = \sqrt{-3}$  nicht definiert

$$L = \{ \}$$

### Beispiel 7.2

$$\sqrt{x+243} - \sqrt{x} = \sqrt{x} \quad || +\sqrt{x}$$

$$\sqrt{x+243} = 2\sqrt{x} \quad ||^2 \quad (\text{Gewinnumformung})$$

$$x+243 = 4x$$

$$243 = 3x$$

$$x = 81$$

Probe L:  $\sqrt{81+243} - \sqrt{81} = \sqrt{324} - 9 = 18 - 9 = 9$

Probe R:  $\sqrt{81} = 9$  (stimmt)

$$L = \{81\}$$

### Beispiel 7.3

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3} \quad ||^2 \quad (2BF)$$

$$(x+2) + 2\sqrt{x+2}\sqrt{x-2} + (x-2) = 2x+3 \quad (\text{zusammenfassen})$$

$$2x + 2\sqrt{x+2}\sqrt{x-2} = 2x+3 \quad || -2x$$

$$2\sqrt{x+2}\sqrt{x-2} = 3 \quad ||^2$$

$$4(x+2)(x-2) = 9 \quad (3BF)$$

$$4(x^2 - 4) = 9$$

$$4x^2 - 16 = 9$$

$$4x^2 = 25$$

$$x^2 = \frac{25}{4}$$

$$x = \pm \frac{5}{2}$$

Probe für  $x = \frac{5}{2}$ :

$$\text{L: } \sqrt{\frac{5}{2} + 2} + \sqrt{\frac{5}{2} - 2} = \sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{R: } \sqrt{2 \cdot \frac{5}{2} + 2} = \sqrt{5+3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Probe für  $x = -\frac{5}{2}$ :

$$\text{L: } \sqrt{-\frac{5}{2} + 2} + \sqrt{-\frac{5}{2} - 2} = \sqrt{-\frac{1}{2}} + \sqrt{-\frac{9}{2}} \quad \text{nicht definiert}$$

$$L = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$