Quadratwurzeln

Theorie

Inhaltsverzeichnis

Version vom 5. Januar 2020

1 Definition, Begriffe und Berechnung

Definition

Für eine nichtnegative Zahl a ist $b = \sqrt{a}$ die nichtnegative Zahl mit der Eigenschaft $b^2 = a$.

- a:

- b:

- Wurzelziehen:

Um $\sqrt{9}$ zu berechnen, suchen wir die Zahlen, deren Quadrat 9 ergeben. Dafür kommen $+3$ und -3 in Frage. Da es laut Definition die *nichtnegative* Zahl sein soll, gilt $\sqrt{9} = 3$.

Kopfrechnen

Lerne die folgenden Quadratzahlen auswendig. Sie sind eine wichtige Grundlage für das Rechnen mit Quadratwurzeln.

0^2		7^2		14^2		21^2	
1^2		8^2		15^2		22^2	
2^2		9^2		16^2		23^2	
3^2		10^2		17^2		24^2	
4^2		11^2		18^2		25^2	
5^2		12^2		19^2		26^2	
6^2		13^2		20^2		27^2	

Zu welchem Zahlenbereichen gehören die Quadratwurzeln?

$\sqrt{49} =$

$\sqrt{9/4} =$

$\sqrt{4/9} =$

$\sqrt{2} =$

Stellenzahl der Quadratwurzel

Wie lässt sich aus der Stellenzahl des Radikanden die Stellenzahl einer Quadratwurzel bestimmen, wenn diese eine endliche Dezimaldarstellung hat?

$\sqrt{17\,935\,225} =$

$\sqrt{502.432225} =$

$\sqrt{214\,526.4489} =$

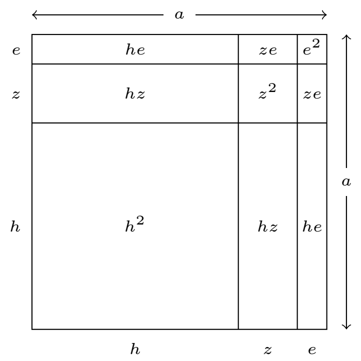
$\sqrt{0.0074545956} =$

Vorkommastellen (VKS):

Nachkomastellen (NKS):

Schriftliches Wurzelziehen

$\sqrt{a}$ kann durch fortlaufendes Ausschöpfen von a bestimmt werden. Bei jedem Schritt sind weitere Mischprodukte zu berücksichtigen.



$a^2 = h^2 + (2hz + z^2) + (2he + 2ze + e^2) = h^2 + (2h + z)z + (2h + 2z + e)e$

Beispiel 1.1

$\sqrt{116\,281} = ?$

Teile die Ziffern des Radikanden von rechts in Zweiergruppen auf.

11 62 81 =

Das Verfahren von Heron (babylonisches Wurzelziehen)

Gegeben: Radikand a, Mindestenauigkeit ε und Startwert x

Gesucht: Näherungslösung für $\sqrt{a}$

(1) Berechne $\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \to x'$. $\left(\text{Durchschnitt von } x \text{ und } \frac{a}{x}\right)$

(2) Ist $|x - x'| < \varepsilon$?

(2.1) *Ja:* Gehe zu (3).

(2.2) *Nein:* Setze $x' \to x$ und gehe zu (1).

(3) Gib x' als Näherungslösung aus. (Ende)

Begründung: x' und $\sqrt{a}$ liegen immer zwischen x und $\frac{a}{x}$.

Beispiel 1.2

$\sqrt{6} = ?$, Genauigkeit $\varepsilon = 0.1$, Startwert $x = 3$

2 Rechenregeln

Die Produktregel

$\sqrt{4 \cdot 9} =$

$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} =$

Behauptung: Für $a \geq 0$ und $b \geq 0$ gilt:

Beweis: Sind $a \geq 0$ und $b \geq 0$ so gibt es Zahlen $x \geq 0$ und $y \geq 0$ mit $x^2 = a$ und $y^2 = b$.

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{x^2 \cdot y^2} = \sqrt{x \cdot x \cdot y \cdot y} \overset{\text{K}}{=} \sqrt{x \cdot y \cdot x \cdot y}$$
$$\overset{\text{A}}{=} \sqrt{(x \cdot y) \cdot (x \cdot y)} = \sqrt{(x \cdot y)^2} \overset{\text{D}}{=} x \cdot y \overset{\text{D}}{=} \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

(K: Kommutativgesetz, A: Assoziativgesetz, D: Definition der Quadratwurzel)

Beispiel 2.1

$\sqrt{160\,000}$

Beispiel 2.2

$\sqrt{200}$

Beispiel 2.3

$\sqrt{10} \cdot \sqrt{2.5}$

Die Quotientenregel

$\sqrt{100 : 25} =$

$\sqrt{100} : \sqrt{25} =$

Behauptung: Für $a \geq 0$ und $b > 0$ gilt:

Beweis: Sind $a \geq 0$ und $b > 0$ so gibt es Zahlen $x \geq 0$ und $y > 0$ mit $x^2 = a$ und $y^2 = b$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{a : b} &= \sqrt{x^2 : y^2} = \sqrt{(x \cdot x) : (y \cdot y)} = \sqrt{x \cdot x : y : y} \\
&\overset{\text{K}}{=} \sqrt{x : y \cdot x : y} \overset{\text{A}}{=} \sqrt{(x : y) \cdot (x : y)} = \sqrt{(x : y)^2} \\
&\overset{\text{D}}{=} x : y \overset{\text{D}}{=} \sqrt{a} : \sqrt{b}
\end{aligned}$$

Beispiel 2.4

$\sqrt{0.000144}$

Beispiel 2.5

$\dfrac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}}$

Die Potenzregel

$\sqrt{2^6} =$

$\left(\sqrt{2}\right)^6 =$

Behauptung: Für $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Beweis: Für $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ folgt durch mehrfache Anwendung der Produktregel (P)

$$\sqrt{a^n} = \sqrt{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a} \overset{\text{P}}{=} \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt{a} = \left(\sqrt{a}\right)^n$$

Beispiel 2.6

$\sqrt{2^6}$

3 Die Normalform

Ist es möglich einen Wurzelterm in der Gestalt

$$q_0 + q_1\sqrt{n_1} + q_2\sqrt{n_2} + \ldots$$

darzustellen, wobei $q_0, q_1, q_2, \ldots$ rationale Zahlen und $n_1, n_2, \ldots$ verschiedene quadratfreie natürliche Zahlen sind, so spricht man von *der Normalform* dieses Wurzelterms.

Beispiel 3.1

$\sqrt{8}$

Beispiel 3.2

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Beispiel 3.3

$\sqrt{\dfrac{20}{7}}$

Beispiel 3.4

$\sqrt{75} + \sqrt{72} - \sqrt{27} + \sqrt{2}$

Beispiel 3.5

$\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2$

Beispiel 3.6

$\dfrac{1}{3 + \sqrt{2}}$

Beispiel 3.7

$\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$

Beispiel 3.8

Ist die Aussage wahr oder falsch?
$\sqrt{3}+\sqrt{12}+\sqrt{18}=\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{27}$

Beispiel 3.9

$\sqrt{\sqrt{3}}$

4 Wurzelterme mit Variablen

Überprüfe den Wahrheitsgehalt der Aussageform

$$\sqrt{a^2}=a,$$

indem du …

- a durch 2 ersetzt:
- a durch -2 ersetzt:

Mit dem Symbol

$$|a| := \sqrt{a^2} \quad \text{[lies: „Betrag von a“]}$$

zeigen wir an, dass $\sqrt{a^2}$ nichtnegativ ist, selbst wenn $a<0$ gilt.

Beispiel 4.1

$\sqrt{x^2}=$

Beispiel 4.2

$\sqrt{z^3}$

Beispiel 4.3

$\sqrt{c^4}$

Beispiel 4.4

$\sqrt{y^2 - 8y + 16}$

Beispiel 4.5

$\sqrt{m^2 + m^3}$

Beispiel 4.6

$\sqrt{(x+y)^2 - (x-y)^2}$

5 Lineare Gleichungen mit Wurzelkoeffizienten

Beispiel 5.1

$x\sqrt{3} + \sqrt{2} = \sqrt{5} - x\sqrt{2}$

Beispiel 5.2

$$\left(\sqrt{2} - x\right)^2 = (4 - x)(3 - x)$$

6 Quadrierte Gleichungen

Sind A und B zwei Polynome, so ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$A^2 = B^2$$

die Vereinigungsmenge der Lösungsmengen von

$$A = B \quad \text{und} \quad A = -B$$

Beispiel 6.1

$\big(x - 4)^2 = 144$

Beispiel 6.2

$\big(2x - 12)^2 = (3x - 15)^2$

7 Wurzelgleichungen

Eine Wurzelgleichung ist eine Gleichung, bei der die Unbekannte im Radikanden auftritt.

- $\sqrt{2}x + \sqrt{3}x = 5$ keine echte Wurzelgleichung
- $2\sqrt{x} + \sqrt{3x} = 5$ echte Wurzelgleichung

Beispiel 7.1

$\sqrt{2-x} = \sqrt{x-8}$

Beispiel 7.2

$\sqrt{x+243} - \sqrt{x} = \sqrt{x}$

Beispiel 7.3

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3}$$