Stereometrie

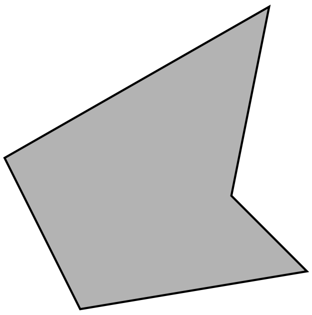
Theorie (L)

Inhaltsverzeichnis

Version vom 6. Dezember 2020

1 Einleitung

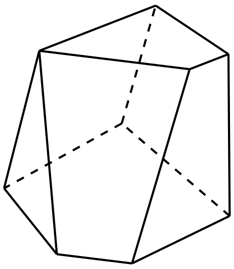
Planimetrie (ebene Geometrie)



Die Objekte sind *Figuren* mit ...

- Ecken
- Seiten
- Umfang
- Flächeninhalt

Stereometrie (räumliche Geometrie)



Die Objekte sind *Körper* mit ...

- Ecken
- Kanten
- Flächen
- Oberflächeninhalt
- Rauminhalt (Volumen)

Raum- und Holmasse

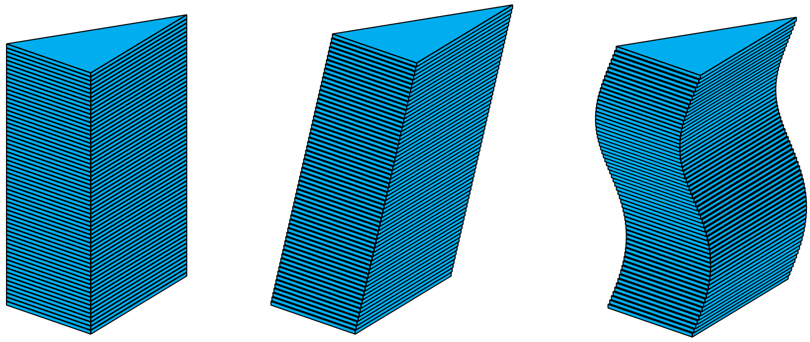
$1\,\mathrm{km}^3 = 10^9\,\mathrm{m}^3$
$1\,\mathrm{m}^3 = 10^3\,\mathrm{dm}^3$
$1\,\mathrm{dm}^3 = 10^3\,\mathrm{cm}^3 \qquad 1\,\mathrm{dm}^3 = 1\,\mathrm{l}$
$1\,\mathrm{cm}^3 = 10^3\,\mathrm{mm}^3 \qquad 1\,\mathrm{cm}^3 = 1\,\mathrm{ml}$

Dichte

Die Dichte ϱ eines Stoffes ist das Verhältnis seiner Masse (kg) zu seinem Volumen (m^3).

$$\varrho = \frac{m}{V} \quad \Leftrightarrow \quad m = \varrho \cdot V \quad \Leftrightarrow \quad V = \frac{m}{\varrho}$$

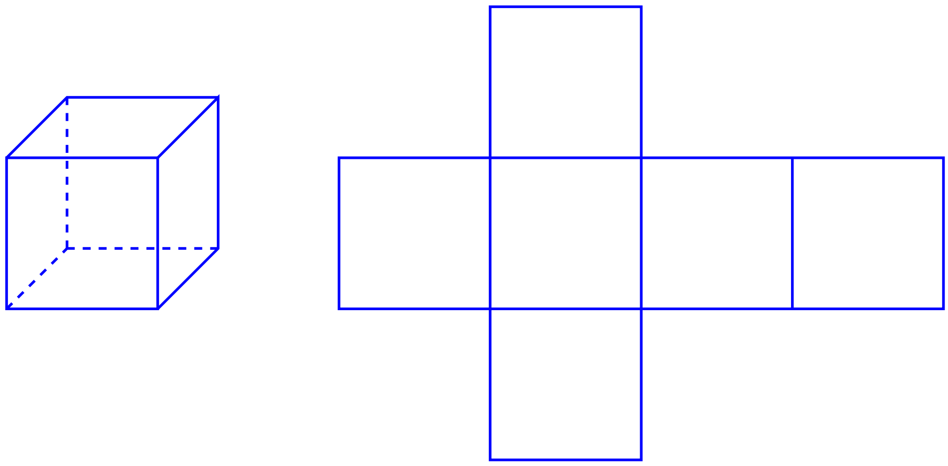
Das Prinzip von Cavalieri



Zwei Körper besitzen dasselbe Volumen, wenn alle ihre Schnittflächen in Ebenen parallel zu einer Grundebene in gleichen Höhen den gleichen Flächeninhalt haben.

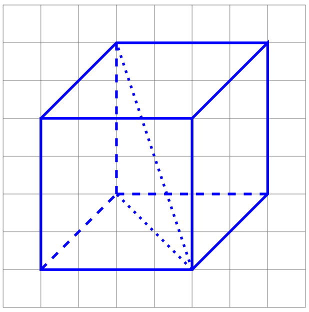
Netze

Ein *Netz* eines Körpers ist eine Darstellung, bei der dieser an einigen Kanten aufgeschnitten wird und seine Flächen in der Ebene ausgebreitet dargestellt werden.



2 Würfel und Quader

Ein *Würfel* ist ein Körper, der von sechs kongruenten Quadraten begrenzt wird.



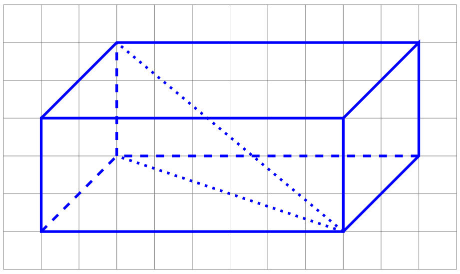
Flächendiagonale: $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\,a$

Raumdiagonale: $k = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$

Oberflächeninhalt: $S = 6a^2$

Volumen: $V = G \cdot h = a^2 \cdot a = a^3$

Ein *Quader* ist ein Körper, der von 3 Paaren kongruenter Rechtecke begrenzt wird.



Raumdiagonale: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

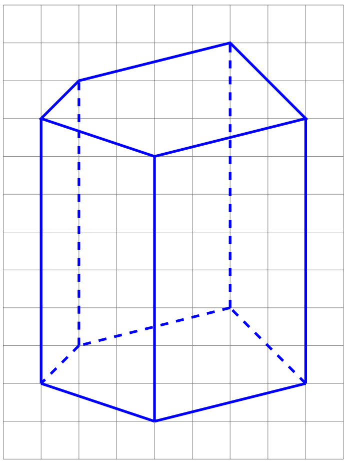
Summe der Kantenlängen: $K = 4a + 4b + 4c = 4(a+b+c)$

Oberflächeninhalt: $S = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab+ac+bc)$

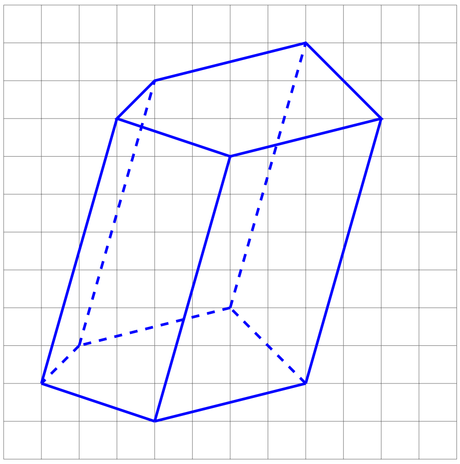
Volumen: $V = G \cdot h = abc$

3 Prisma

Ein *Prisma* ist ein Körper mit parallelen kongruenten Vielecken als Grund- und Deckfläche. Die Seitenflächen *gerader Prismen* sind Rechtecke; bei *schiefen Prismen* sind es Parallelogramme.

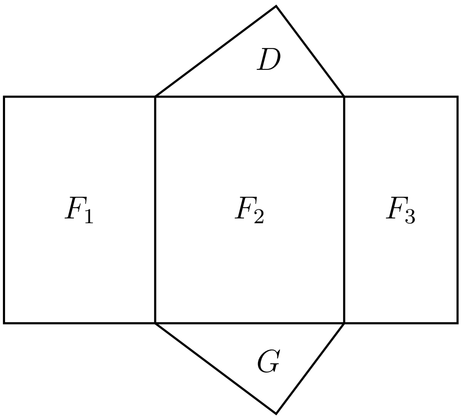


gerades Prisma



schiefes Prisma

Ein (schiefes/gerades) Prisma mit einem regelmässigen Vieleck als Grundfläche wird *reguläres (schiefes/gerades) Prisma* genannt.



Netz eines geraden Prismas

Für gerade Prismen gilt:

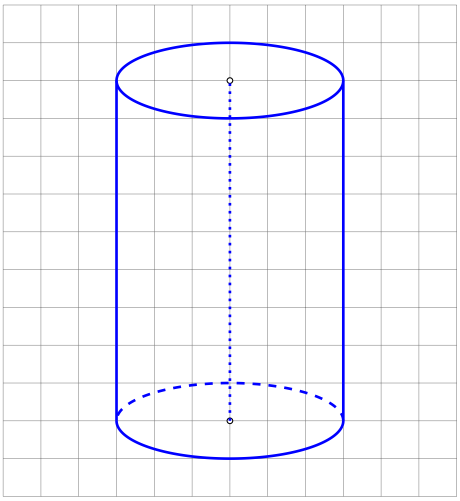
Mantelflächeninhalt: $M = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots = u \cdot h$

Oberflächeninhalt: $S = 2G + M$

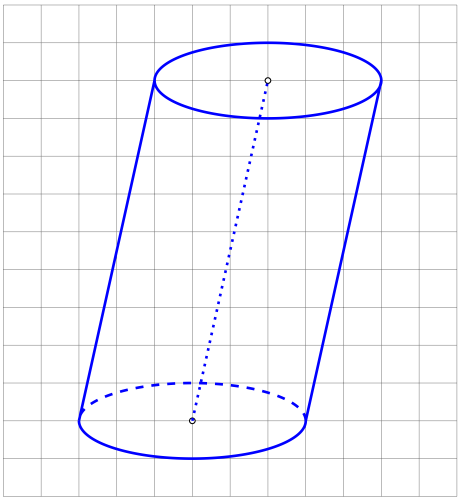
Volumen: $V = Gh$

4 Zylinder

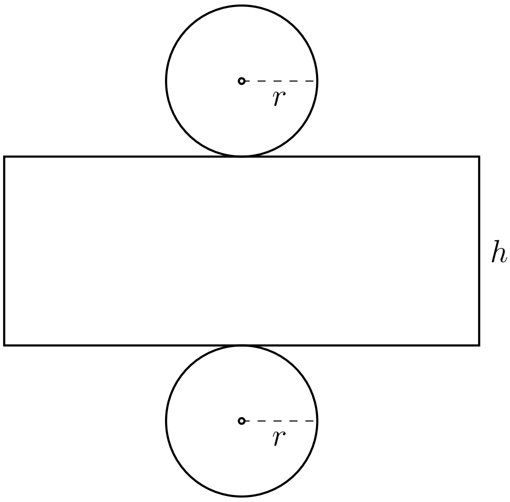
Ein *Zylinder* ist ein Prisma mit einer runden Grundfläche. Diese ist meistens ein Kreis, weshalb man auch präziser von einem Kreiszylinder spricht.



gerader Kreiszylinder



schiefer Kreiszylinder



Netz eines geraden Kreiszylinders

Für gerade Kreiszylinder gilt:

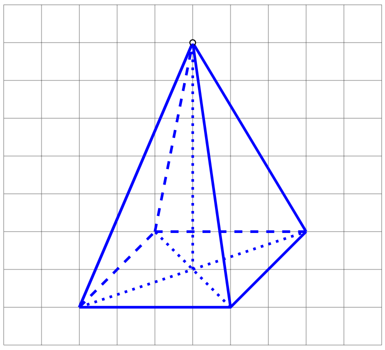
Mantelflächeninhalt: $M = uh = 2\pi rh$

Oberflächeninhalt: $S = 2G + M = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

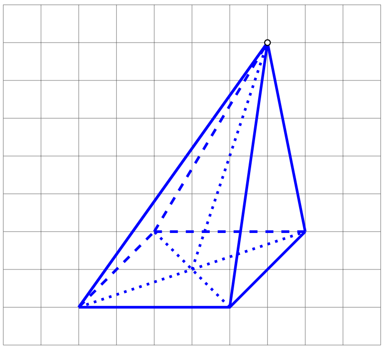
Volumen: $V = Gh = \pi r^2 h$

5 Pyramide

Eine *Pyramide* ist ein Körper mit einem Polygon (Vieleck) als Grundfläche, von dessen Ecken aus die Seitenkanten in einem Punkt (Spitze) zusammenlaufen. Die Seitenflächen bestehen somit aus Dreiecken.

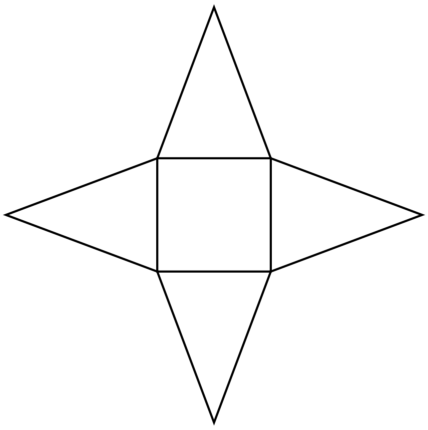


gerade quadratische Pyramide



schiefe quadratische Pyramide

Eine Pyramide heisst *regulär* (oder *regelmässig*), wenn die Grundfläche ein regelmässiges Vieleck ist. Die Begriffe *gerade* und *schief* sind bei Pyramiden nur dann sinnvoll, wenn die Grundfläche symmetrisch ist.



Netz einer geraden Pyramide

Für eine gerade Pyramide gilt:

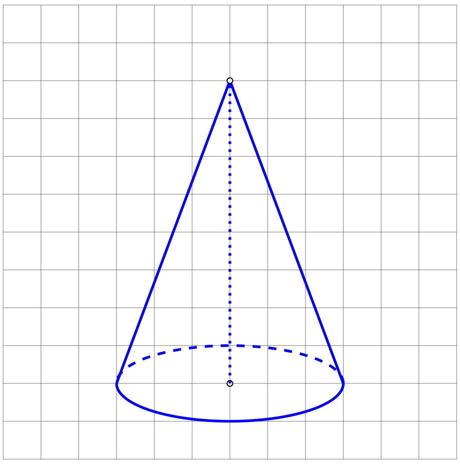
Mantelflächeninhalt: $M = D_1 + D_2 + D_3 + \ldots$

Oberflächeninhalt: $S = G + M$

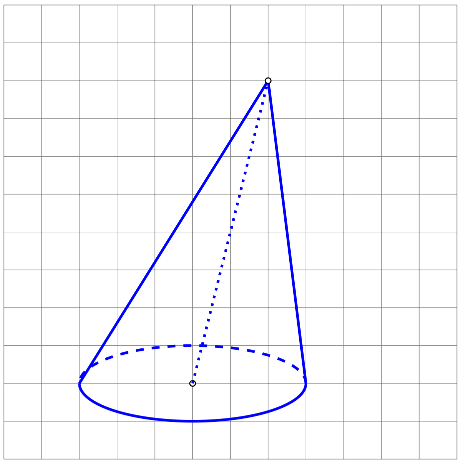
Volumen: $V = \frac{1}{3} Gh$

6 Kegel

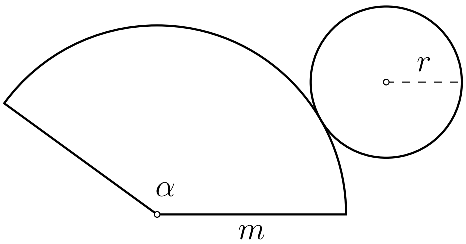
Ein *Kegel* ist eine Pyramide mit einer runden Grundfläche. Ist diese ein Kreis, so spricht man von einem *Kreiskegel*.



gerader Kreiskegel



schiefer Kreiskegel



Netz eines geraden Kreiskegels

Für einen geraden Kreiskegel gilt:

Mantellinie: $m = \sqrt{r^2 + h^2}$

Zentriwinkel: $\alpha = \dfrac{2\pi r}{2\pi m} \cdot 360° = \dfrac{r}{m} \cdot 360°$

Mantelflächeninhalt: $M = \pi r m = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}$

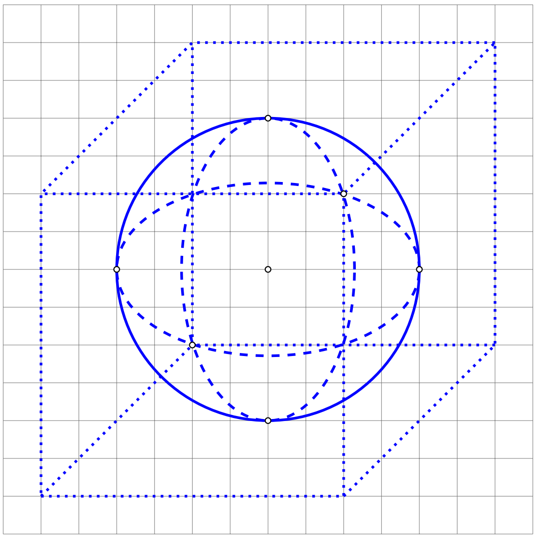
Oberflächeninhalt: $S = G + M = \pi r^2 + \pi r m = \pi r(r + m)$

Volumen: $V = \dfrac{1}{3} G h$

7 Kugel

Die Menge aller Punkte P, die von einem Punkt M den gleichen Abstand r (Radius) haben, heisst *Kugeloberfläche*.

Die Menge aller Punkte P, die von einem Punkt M einen Abstand kleiner oder gleich r haben, heisst *Kugel*.



Oberfläche: $S = \pi r^2$

Volumen: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$