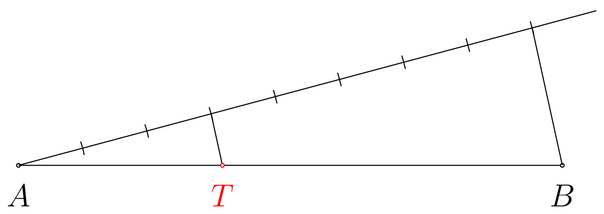
Ähnlichkeit

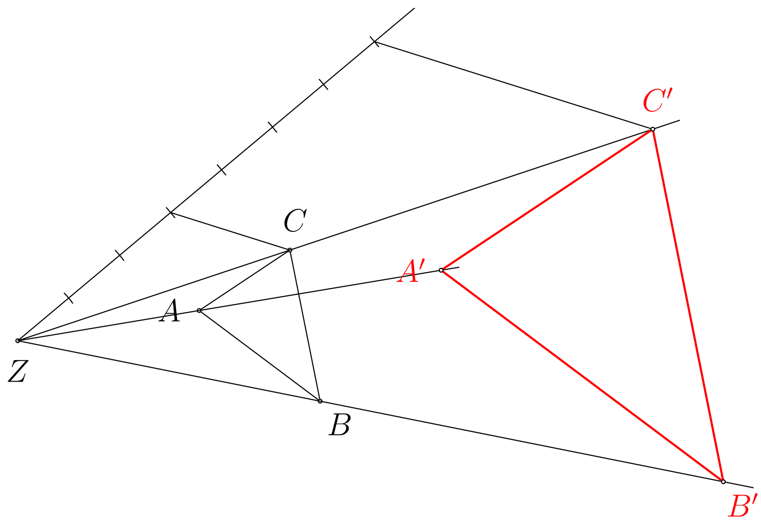
Übungen (L)

Version vom 30. August 2022

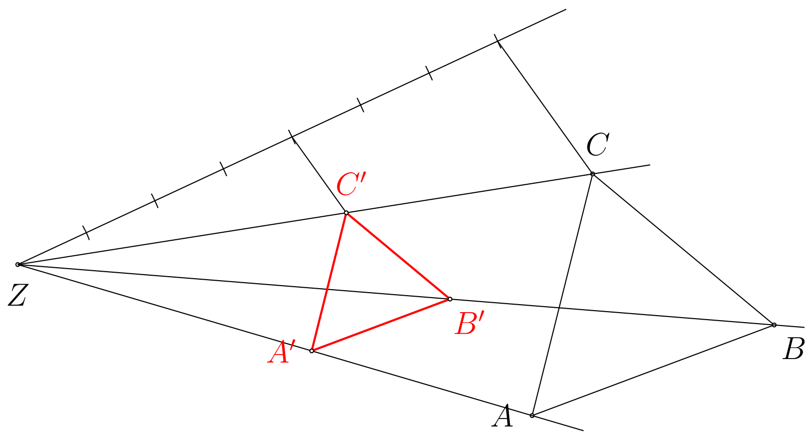
Aufgabe 1.1



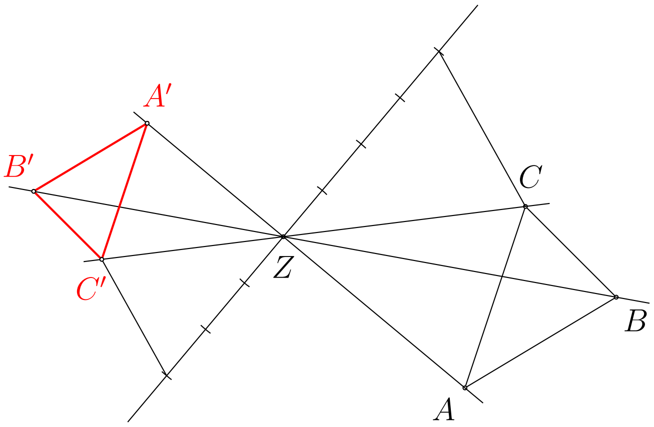
Aufgabe 1.2



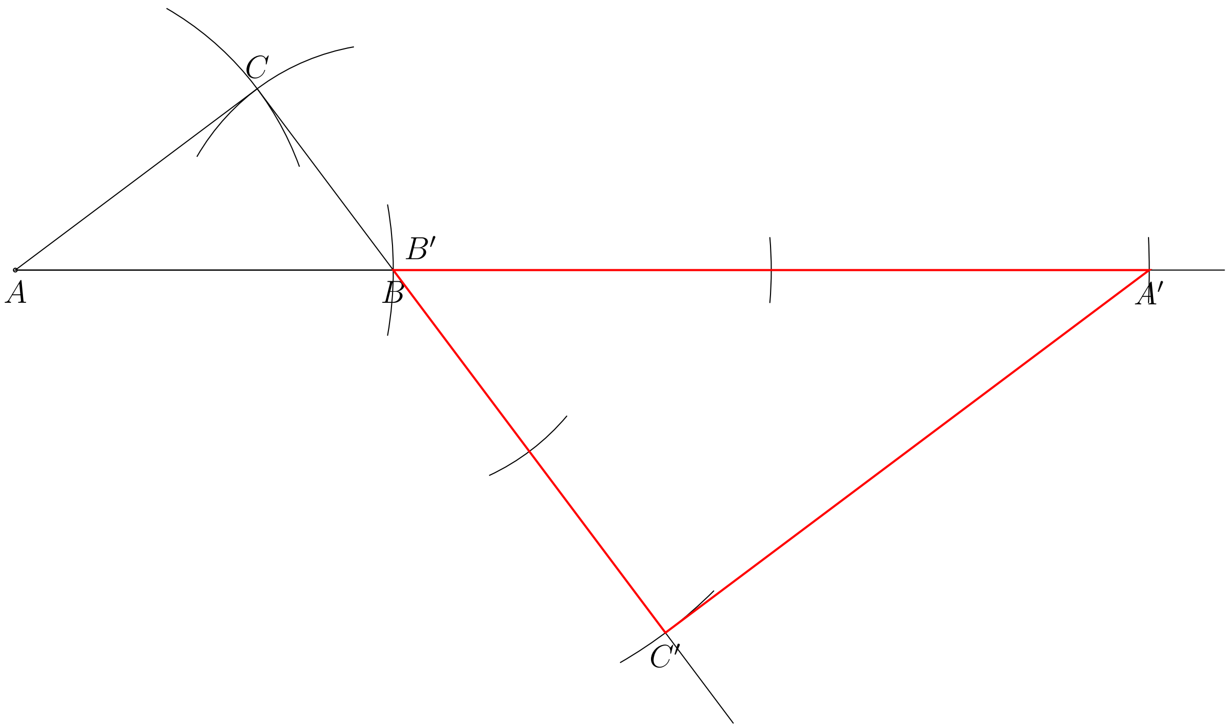
Aufgabe 1.3



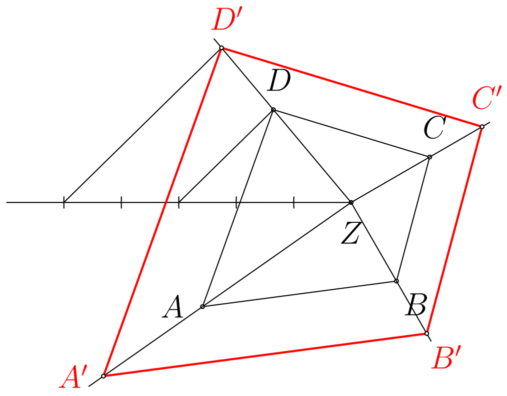
Aufgabe 1.4



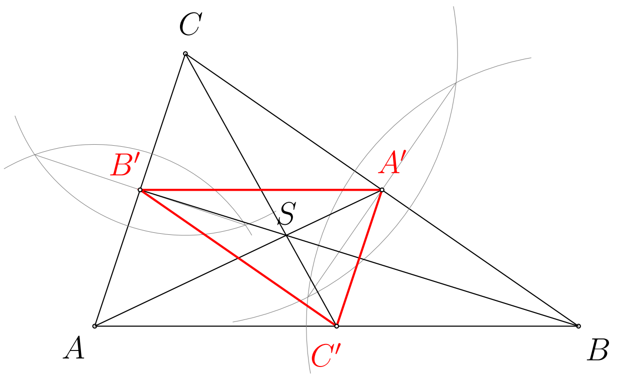
Aufgabe 1.5



Aufgabe 1.6

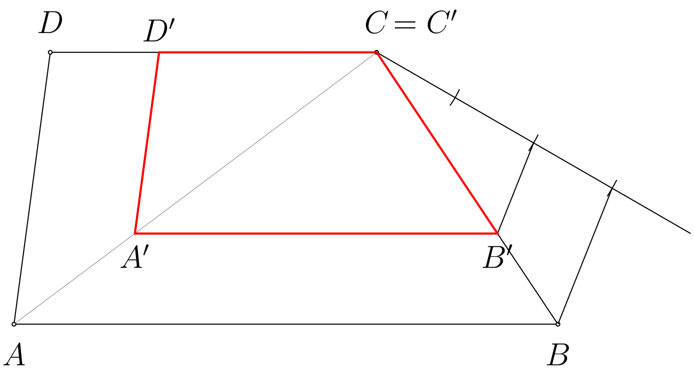


Aufgabe 1.7

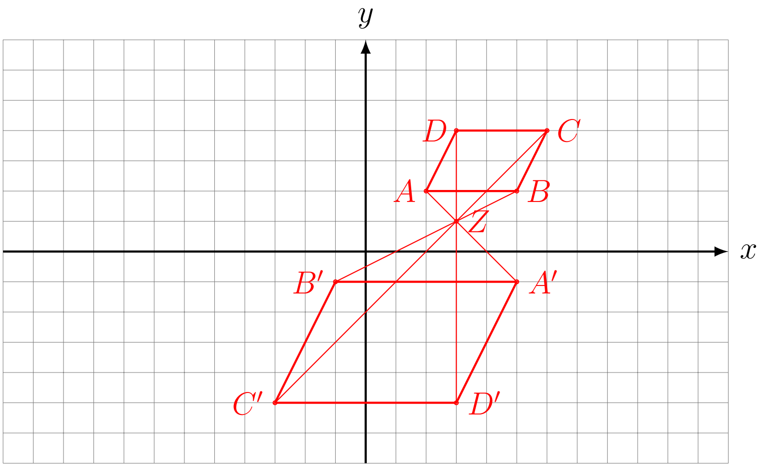


Der Schwerpunkt eines Dreiecks teilt die Schwerlinien, von der Ecke aus gesehen, im Verhältnis 2 : 1.

Aufgabe 1.8



Aufgabe 1.9



Aufgabe 1.10

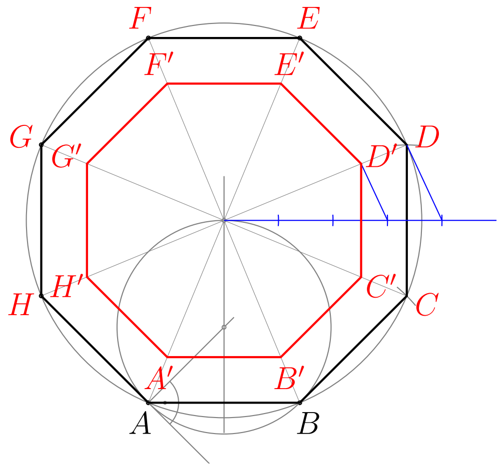
Flächeninhalt der Originalfigur: $A = a \cdot h_a = 24\,\text{cm}^2$

Flächeninhalt der Bildfigur: $A' = 54\,\text{cm}^2$

Flächenverhältnis: $54\,\text{cm}^2 : 24\,\text{cm}^2 = 9 : 4$

Streckungsverhältnis: $\sqrt{9} : \sqrt{4} = 3 : 2 = 1.5$ (Vergrösserung)

Aufgabe 1.11



Aufgabe 1.12

einer Punktspiegelung

Aufgabe 1.13

Multipliziert man die Längen der Originalfigur mit dem Streckungsfaktor k, so erhält man die Längen der Bildfigur. Negative Vorzeichen müssen entfernt werden.

(a) $a' = |0.4| \cdot 5\,\text{cm} = 2\,\text{cm}$

$b' = |0.4| \cdot 6\,\text{cm} = 2.4\,\text{cm}$

$c' = |0.4| \cdot 8\,\text{cm} = 3.2\,\text{cm}$

(b) $a' = |-1.5| \cdot 5\,\text{cm} = 7.5\,\text{cm}$

$b' = |-1.5| \cdot 6\,\text{cm} = 9\,\text{cm}$

$c' = |-1.5| \cdot 8\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$

Aufgabe 1.14

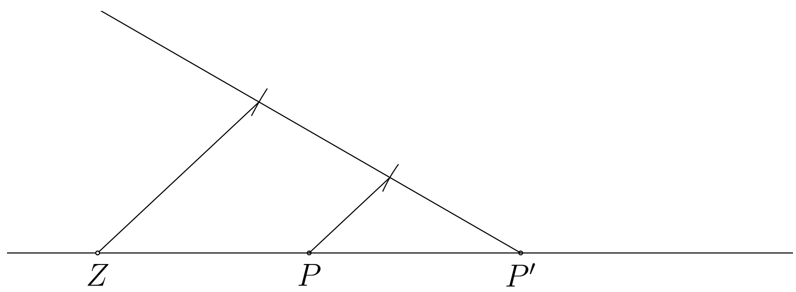
$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = 48\,\text{cm}^2$

Flächeninhalt der Bildfigur: $A' = 27\,\text{cm}^2$

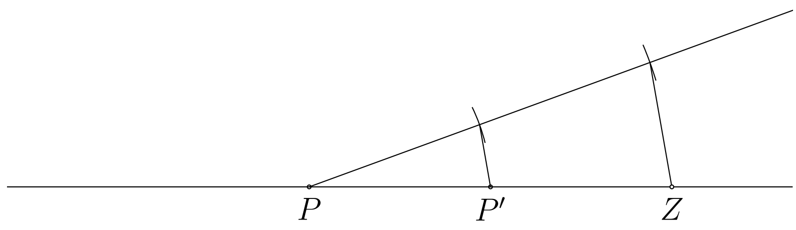
Flächenverhältnis: $27\,\text{cm}^2 : 48\,\text{cm}^2 = 9 : 16$

Streckungsverhältnis: $\sqrt{9} : \sqrt{16} = 3 : 4 = 0.75$ (Verkleinerung)

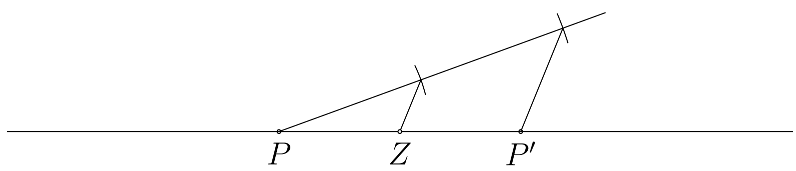
Aufgabe 1.15



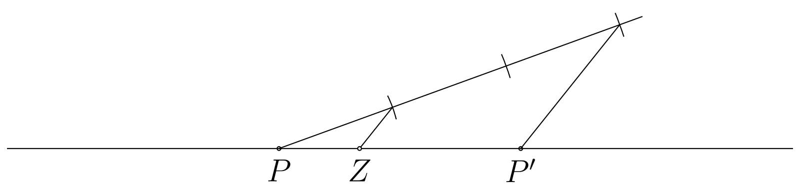
Aufgabe 1.16



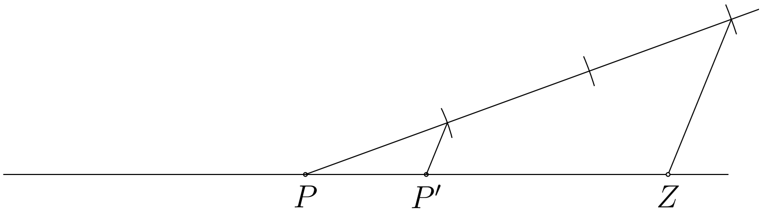
Aufgabe 1.17



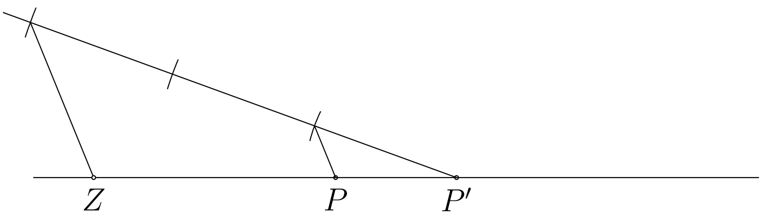
Aufgabe 1.18



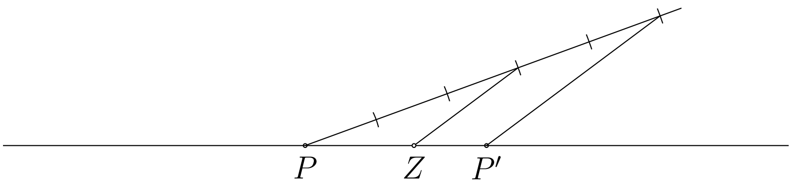
Aufgabe 1.19



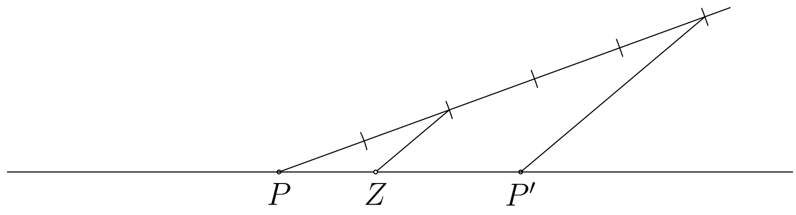
Aufgabe 1.20



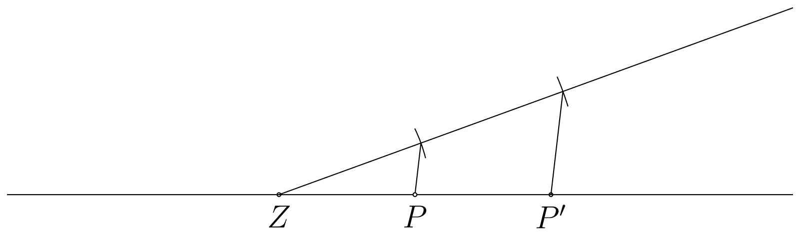
Aufgabe 1.21



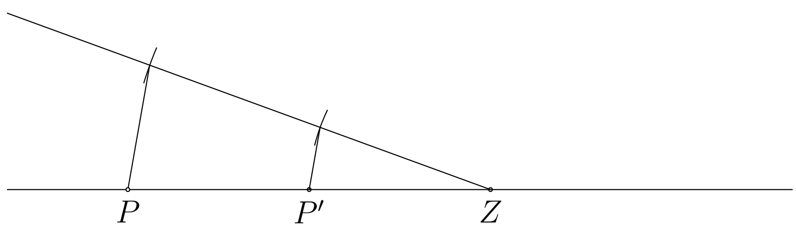
Aufgabe 1.22



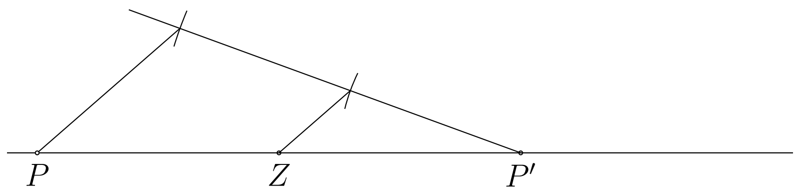
Aufgabe 1.23



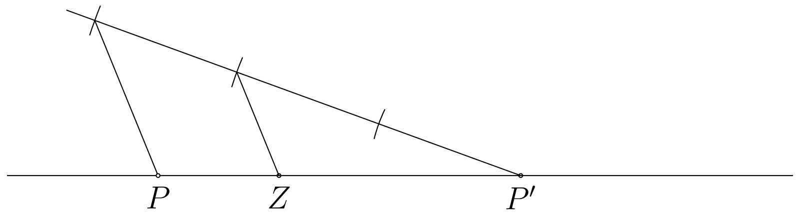
Aufgabe 1.24



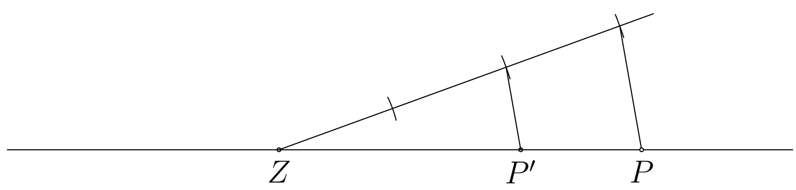
Aufgabe 1.25



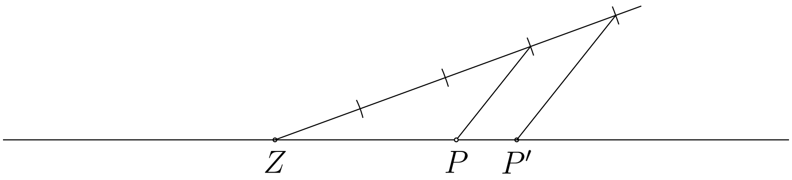
Aufgabe 1.26



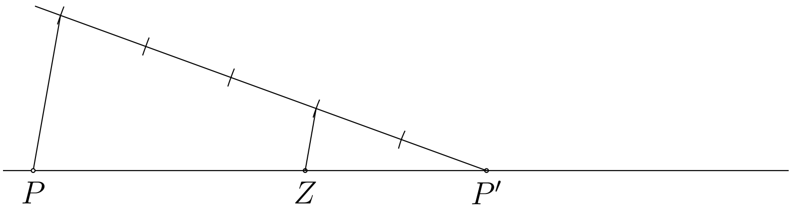
Aufgabe 1.27



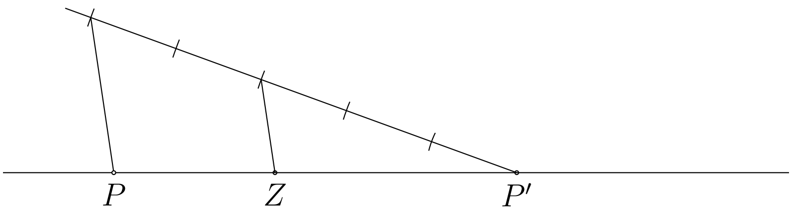
Aufgabe 1.28



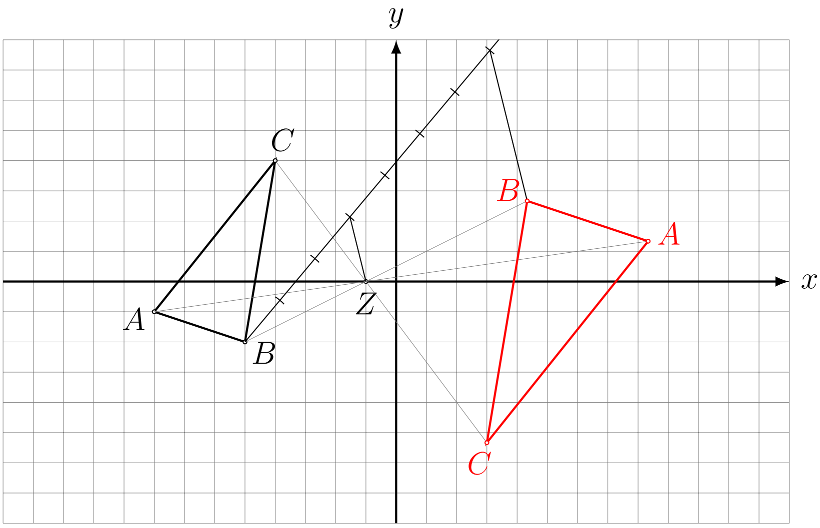
Aufgabe 1.29



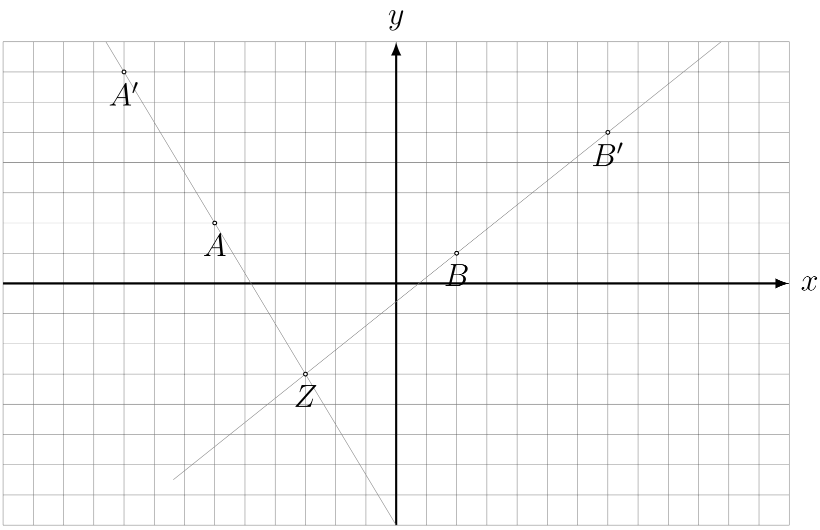
Aufgabe 1.30



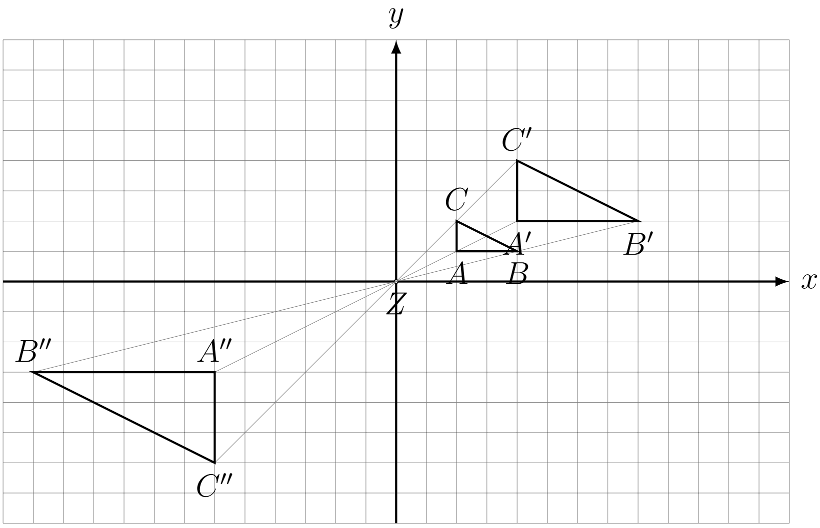
Aufgabe 1.31



Aufgabe 1.32



Aufgabe 1.33



Wenn man die entsprechenden Ecken von ABC und $A''B''C''$ verbindet, sieht man, dass das Streckungszentrum unverändert $Z(0,0)$ bleibt.

Den direkten Streckungsfaktor erhält man durch Multiplikation der einzelnen Streckungsfaktoren:

$k = k_1 \cdot k_2 = 2 \cdot (-1.5) = -3.$

Aufgabe 1.34

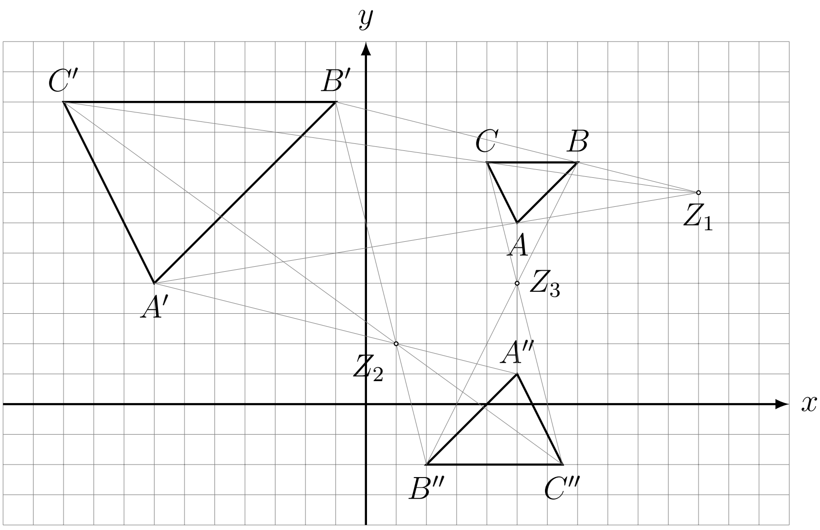
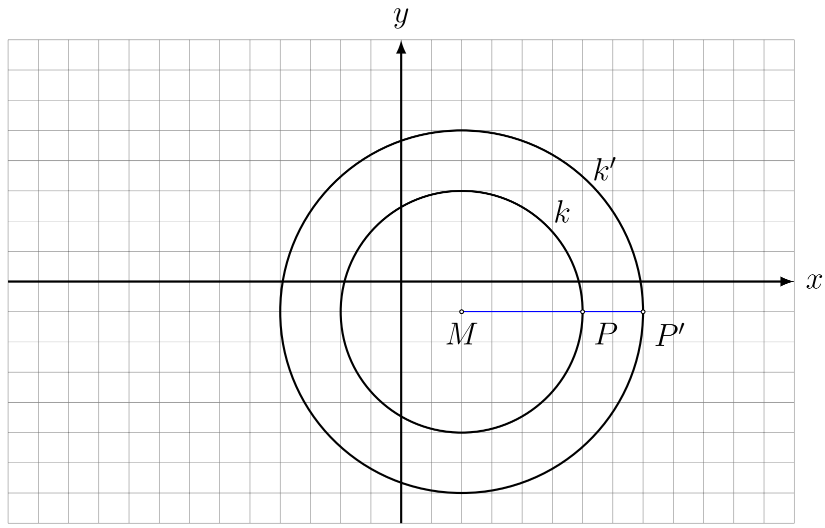


Abbildung $ABC \to A'B'C'$:

Streckungszentrum $Z_3(5,4)$

Streckungsfaktor $k_3 = k_1 \cdot k_1 = 3 \cdot (-0.5) = -1.5$

Aufgabe 1.35

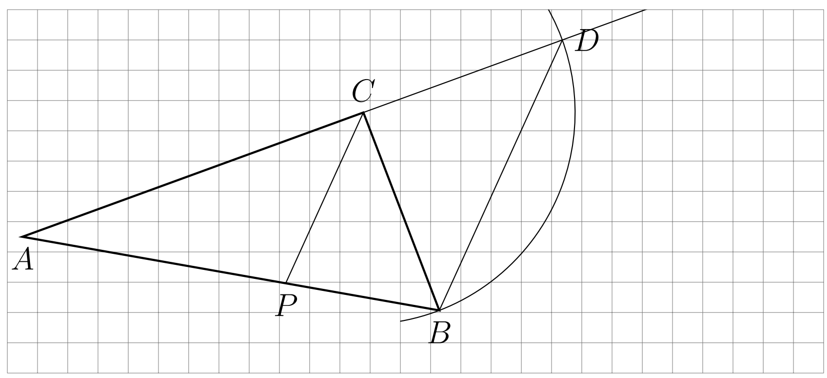


$F_{\text{Kreisring}} = F_{k_2} - F_{k_1} = \pi r_2^2 - \pi r_1^2 = 36\pi - 16\pi = 20\pi$

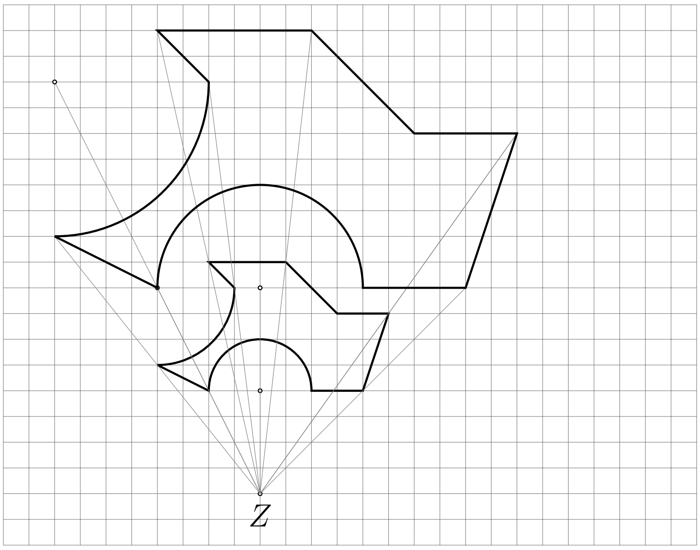
Aufgabe 1.36

- Jede Gerade g, die durch das Zentrum geht, wird auf sich selbst abgebildet.
- Jede Gerade g, die nicht durch das Zentrum geht, wird auf eine zu g parallele Gerade g' abgebildet.
- Der Umlaufssinn von Bild und Originalfigur ist gleich.
- Entsprechende Winkel in Bild und Originalfigur stimmen überein.
- Entsprechende Längen von Bild- und Originalstrecke stehen im Verhältnis $k : 1$.
- Die Flächeninhalte von Bild- und Originalfigur stehen im Verhältnis $k^2 : 1$.

Aufgabe 1.37



Aufgabe 1.38



Aufgabe 1.39

Für den Streckungsfaktor k gilt:

$$k \cdot \text{alte Streckenlänge} = \text{neue Streckenlänge}$$

Also ist $k \cdot 6\,\text{cm} = 18\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad k = 3$

Somit muss $h_c' = 3 \cdot 3\,\text{cm} = 9\,\text{cm}$ sein.

Aufgabe 1.40

(a) Der zentrisch gestreckte (Bild-)Kreis hat einen Radius von $r' = 4 \cdot 2.5\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$ und einen Flächeninhalt von $A' = \pi \cdot 10^2 = 314.16\,\text{cm}^2$

(b) Die Längen verhalten wie $4 : 1$.

Also verhalten sich die (Kreis-)Flächen wie $4^2 : 1^2 = 16 : 1$

Aufgabe 1.41

Das Urbildrechteck hat einen Flächeninhalt von $A = a \cdot b = 14\,\text{cm}^2$. Das Bildrechteck hat gemäss Aufgabenstellung einen Flächeninhalt von $A' = 350\,\text{cm}^2$.

Da der Flächenstreckungsfaktor das Quadrat des Längenstreckungsfaktors k ist, gilt:

$$k^2 \cdot 14\,\text{cm}^2 = 350\,\text{cm}^2$$

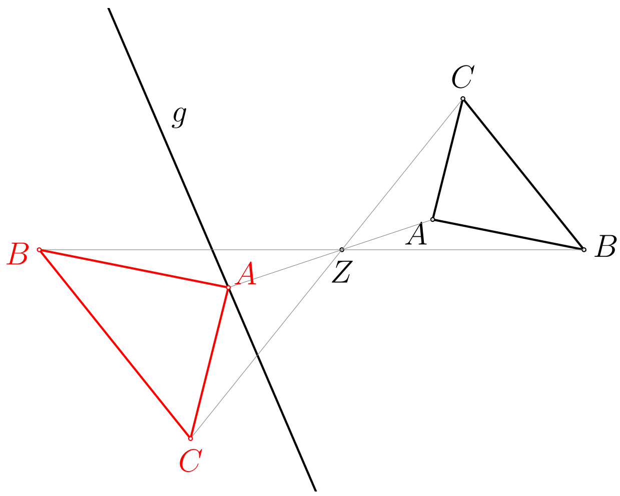
Also ist $k^2 = 350 : 14 = 25$ und somit $k = 5$.

Die Seitenlängen des Bilddrechtecks betragen folglich:

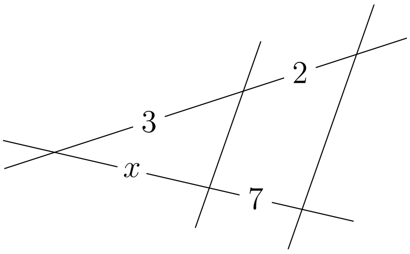
$a' = 5 \cdot 7\,\text{cm} = 35\,\text{cm}$

$b' = 5 \cdot 2\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$

Aufgabe 1.42



Aufgabe 2.1

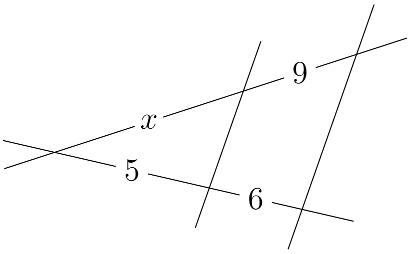


$3 : 2 = x : 7 \quad$ (1. Strahlensatz)

$2x = 21$

$x = 10.5$

Aufgabe 2.2

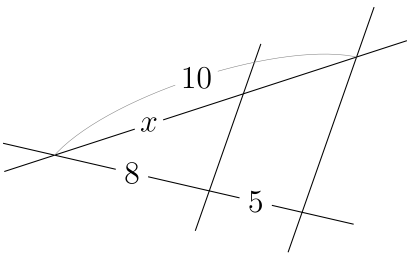


$x : 9 = 5 : 6 \quad$ (1. Strahlensatz)

$6x = 45$

$x = 7.5$

Aufgabe 2.3

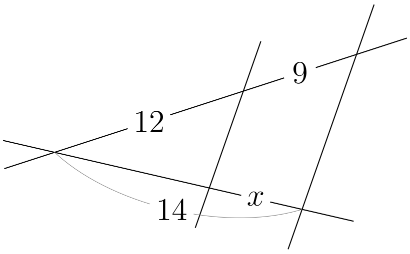


$x : 10 = 8 : (8 + 5) \quad$ (1. Strahlensatz)

$13x = 80$

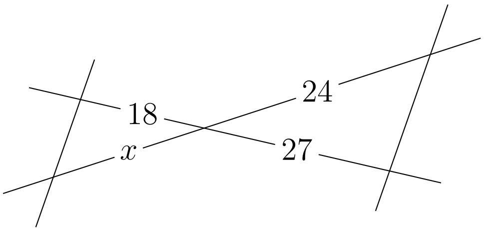
$x = \frac{80}{13}$

Aufgabe 2.4



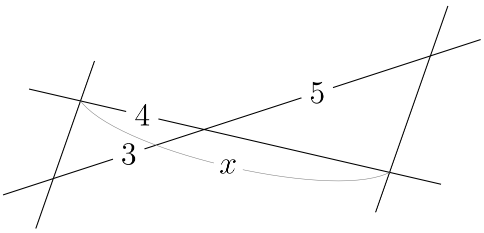
$$
\begin{aligned}
(12+9) : 9 &= 14 : x \quad \text{(1. Strahlensatz)}\\
21x &= 126\\
x &= 6
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.5



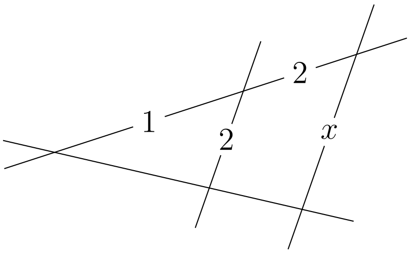
$$
\begin{aligned}
x : 24 &= 18 : 27 \quad \text{(1. Strahlensatz)}\\
27x &= 24 \cdot 18\\
x &= 16
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.6



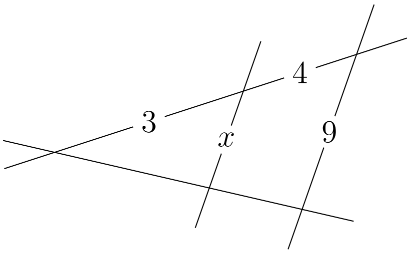
$$
\begin{aligned}
4 : x &= 3 : (3+5) \quad \text{(1. Strahlensatz)}\\
3x &= 32\\
x &= \tfrac{32}{3}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.7



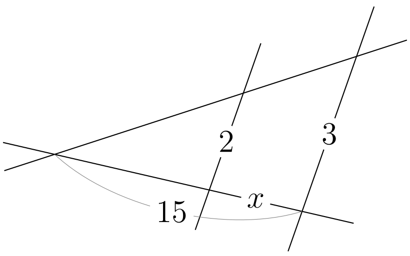
$$1 : 2 = (1 + 2) : x \quad \text{(2. Strahlensatz)}$$
$$x = 6$$

Aufgabe 2.8



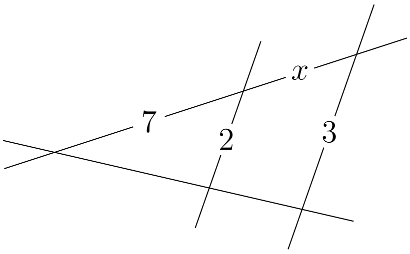
$$3 : x = (3 + 4) : 9 \quad \text{(2. Strahlensatz)}$$
$$7x = 27$$
$$x = \frac{27}{7}$$

Aufgabe 2.9



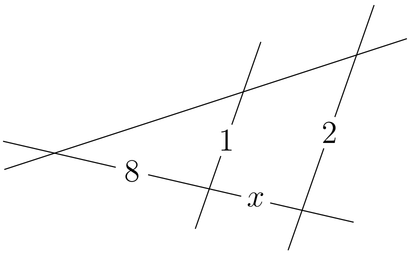
$$(15 - x) : 2 = 15 : 3 \quad \text{(2. Strahlensatz)}$$
$$3(15 - x) = 30$$
$$15 - x = 10$$
$$x = 5$$

Aufgabe 2.10



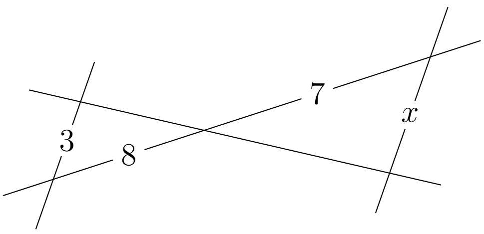
$$
\begin{aligned}
7 : 2 &= (7 + x) : 3 \quad \text{(2. Strahlensatz)}\\
21 &= 2(7 + x)\\
10.5 &= 7 + x\\
x &= 3.5
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.11



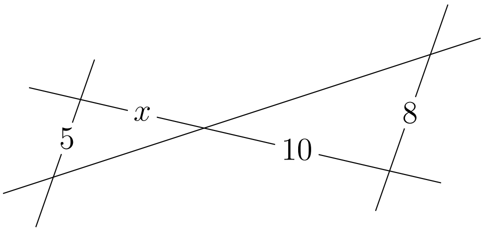
$$
\begin{aligned}
8 : 1 &= (8 + x) : 2 \quad \text{(2. Strahlensatz)}\\
8 + x &= 16\\
x &= 8
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.12



$$
\begin{aligned}
8 : 3 &= 7 : x \quad \text{(2. Strahlensatz)}\\
8x &= 21\\
x &= \tfrac{21}{8}
\end{aligned}
$$

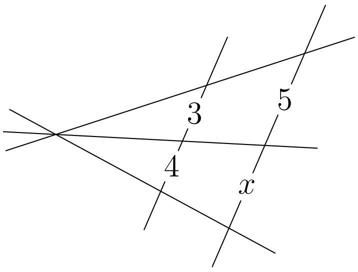
Aufgabe 2.13



$x : 5 = 10 : 8 \quad$ (2. Strahlensatz)

$$8x = 50$$
$$x = \frac{25}{4}$$

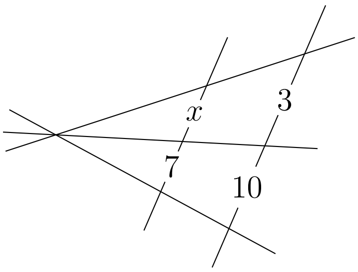
Aufgabe 2.14



$3 : 4 = 5 : x \quad$ (3. Strahlensatz)

$$3x = 20$$
$$x = \frac{20}{3}$$

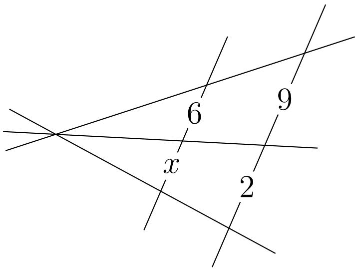
Aufgabe 2.15



$x : 7 = 3 : 10 \quad$ (3. Strahlensatz)

$$10x = 21$$
$$x = 2.1$$

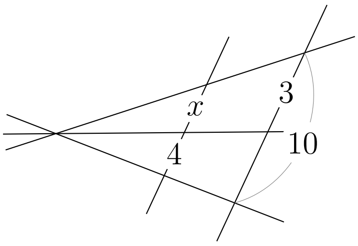
Aufgabe 2.16



$6 : x = 9 : 2$ (3. Strahlensatz)

$$9x = 12$$
$$x = \tfrac{4}{3}$$

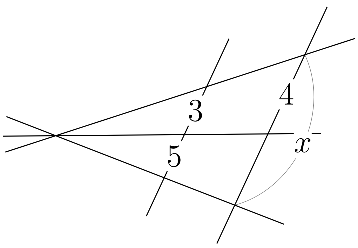
Aufgabe 2.17



$x : 4 = 3 : (10 - 3)$ (3. Strahlensatz)

$$7x = 12$$
$$x = \tfrac{12}{7}$$

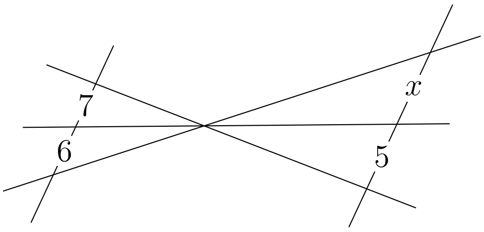
Aufgabe 2.18



$3 : (3 + 5) = 4 : x$ (3. Strahlensatz)

$$3x = 32$$
$$x = \tfrac{32}{3}$$

Aufgabe 2.19

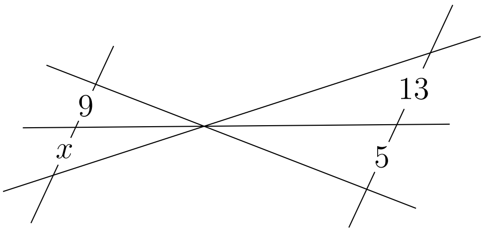


$7 : 6 = 5 : x \quad$ (3. Strahlensatz)

$7x = 30$

$x = \frac{30}{7}$

Aufgabe 2.20

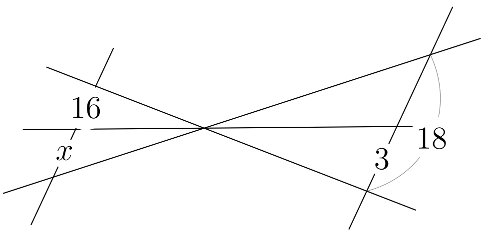


$9 : x = 5 : 13 \quad$ (3. Strahlensatz)

$5x = 117$

$x = \frac{117}{5}$

Aufgabe 2.21

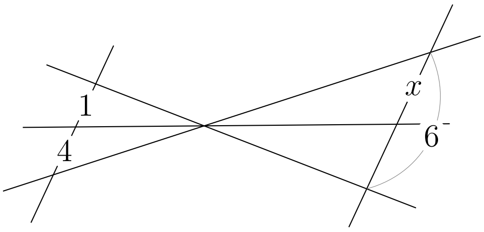


$x : 16 = (18 - 3) : 3 \quad$ (3. Strahlensatz)

$3x = 240$

$x = 80$

Aufgabe 2.22

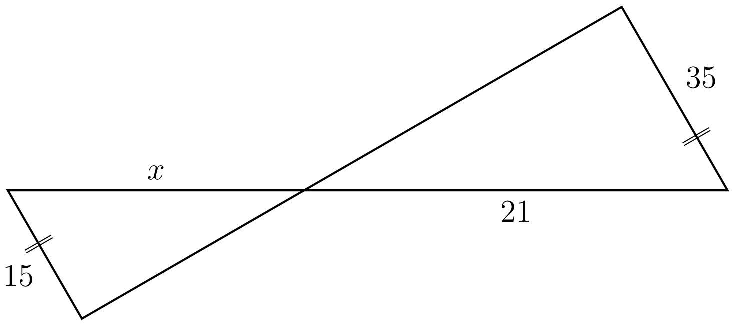


$$\begin{aligned} 4 : (4+1) &= x : 6 \quad \text{(3. Strahlensatz)} \\ 5x &= 24 \\ x &= \tfrac{24}{5} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.23

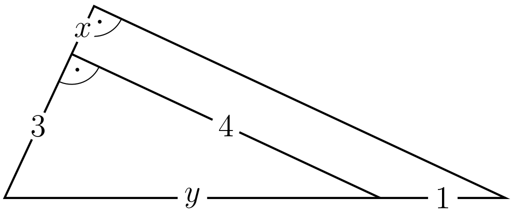
$$\begin{aligned} 8 : 5 &= (8+2) : x \\ 8x &= 5 \cdot 10 \\ x &= 25/4 = 6.25 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.24



$$\begin{aligned} x : 21 &= 15 : 35 \\ 35x &= 21 \cdot 15 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.25

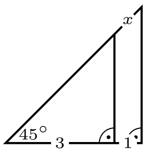


Abschnitt y auf der Hypothenuse (Pythagoras):

$$y = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

1. Strahlensatz:
$$\begin{aligned} 5 : 1 &= 3 : x \\ 5x &= 3 \\ x &= \tfrac{3}{5} = 0.6 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.26



Das kleinere „innere“ Dreieck ist gleichschenklig mit den Katheten $a = b = 3$. Also gilt nach dem Satz von Pythagoras:

$$y = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

1. Strahlensatz:
$$\begin{aligned} 3 : 1 &= 3\sqrt{2} : x \\ 3x &= 3\sqrt{2} \\ x &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.27

Da die Abschnittslängen auf den Parallelen *und* einer Geraden gegeben sind, benötigt man den zweiten Strahlensatz:

$$\begin{aligned} x : b &= (x + c) : a \\ x : 20 &= (x + 9) : 30 \\ 30x &= 20x + 180 \\ 10x &= 180 \\ x &= 18\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.28

$$\begin{aligned} 1.75 : 2.80 &= h : 20 \\ 2.8h &= 20 \cdot 1.75 \\ h &= 12.5 \end{aligned}$$

Das Haus ist 12.5 Meter hoch.

Aufgabe 2.29

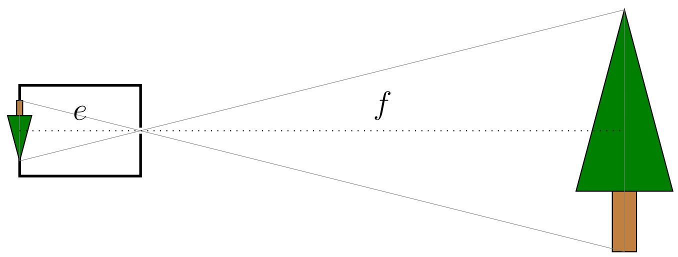
Zuerst jeweils alle Grössen auf einer Seite der Proportion in eine gemeinsame Masseinheit verwandeln.

$$\begin{aligned} 6\,\text{mm} : 700\,\text{mm} &= 3476\,\text{km} : x\,\text{km} \\ 6x &= 2\,433\,200 \\ x &= 405\,533 \end{aligned}$$

Der Mond ist dann 405 533 km von der Erde entfernt.

Aufgabe 2.30

Eine Umwandlung von m in cm ist unnötig, da auf beiden Seiten der Propotion jeweils dieselben Masseinheiten stehen.



Zweiter Strahlensatz: $f : 15 = 15 : 6$

$$\begin{aligned} 6f &= 15 \cdot 15 \\ f &= 37.5 \end{aligned}$$

Der Baum ist 37.5 m von der Öffnung der Kamera entfernt

Aufgabe 2.31

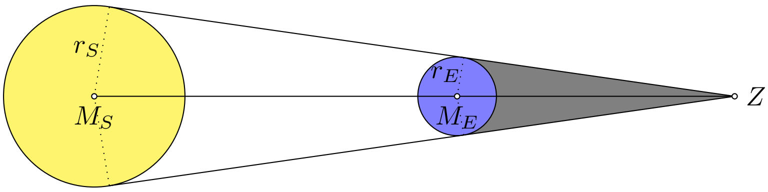
Alle Masseinheiten z. B. in Meter umwandeln.

2. Strahlensatz: $0.5 : 0.16 = 35 : (h - 1.7)$

$$\begin{aligned} 0.5(h - 1.7) &= 0.16 \cdot 35 \\ h - 1.7 &= 0.16 \cdot 70 = 11.2 \\ h &= 12.9 \end{aligned}$$

Der Turm ist 12.9 m hoch.

Aufgabe 2.32



2. Strahlensatz: ($x = |ZM_E|$)

$$
\begin{aligned}
x : 3670 &= \left(x + 1.5 \cdot 10^8\right) : 7 \cdot 10^5 \\
7 \cdot 10^5 x &= 6370x + 9.555 \cdot 10^{11} \\
693\,630x &= 9.555 \cdot 10^{11} \\
x &\approx 1\,377\,500
\end{aligned}
$$

Der Schatten ist 1 377 500 km lang.

Aufgabe 2.33

2. Strahlensatz: $7.2 : 4.8 = 3 : 2$.

Also verhalten sich die Flächeninhalte wie $9 : 4$.

Aufgabe 2.34

Pythagoras: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25} = 5\text{cm}$

Zweiter Strahlensatz:
$$
\begin{aligned}
b : a &= c : x \\
3 : 4 &= 5 : x \\
3x &= 20 \\
x &= \tfrac{20}{3}
\end{aligned}
$$

Die Strecke x ist $\frac{20}{3}$ cm lang.

Aufgabe 2.35

$$
\begin{aligned}
x : (x + 15) &= 6 : 16 \\
16x &= 6(x + 15) \\
16x &= 6x + 90 \\
10x &= 90 \\
x &= 9\,\text{cm}
\end{aligned}
$$

$F = 6 \cdot 9/2 = 27\,\text{cm}^2$

Aufgabe 2.36

obere Parallele: c

$$
\begin{aligned}
119 : 51 &= 210 : c \\
119 \cdot c &= 210 \cdot 51 \\
c &= 90\,\mathrm{cm}
\end{aligned}
$$

$h = \sqrt{(119 + 51)^2 - 150^2} = 80\,\mathrm{cm}$

$x = \sqrt{80^2 + 60^2} = 100\,\mathrm{cm}$

Aufgabe 2.37

- $p \parallel q$?:

  $124 : 248 = 109 : 215 \quad \Rightarrow \quad 26\,660 = 27\,032 \quad \Rightarrow \quad$ nein

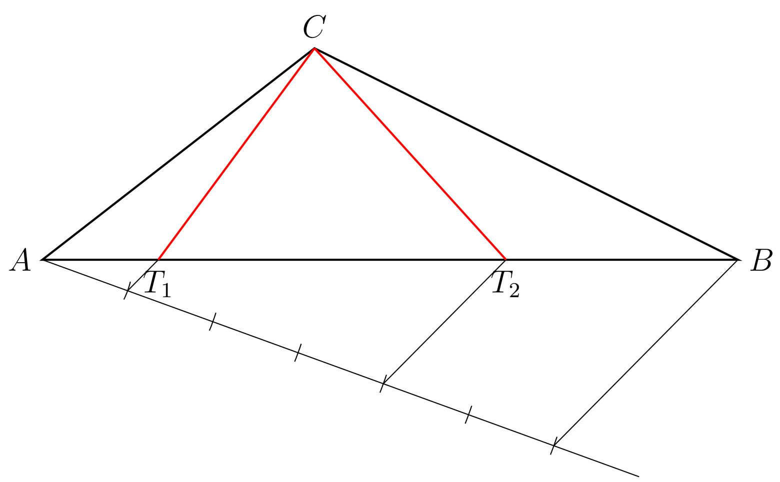
- $p \parallel r$?:

  $124 : 248 = 109 : 216 \quad \Rightarrow \quad 26\,784 = 27\,032 \quad \Rightarrow \quad$ nein

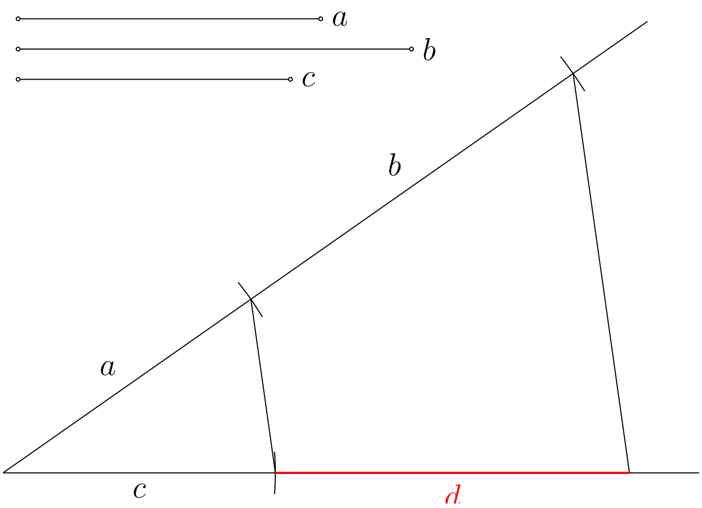
- $q \parallel r$?:

  $216 : 324 = 248 : 372 \quad \Rightarrow \quad 80\,352 = 80\,352 \quad \Rightarrow \quad$ ja

Aufgabe 2.38



Aufgabe 2.39



Aufgabe 3.1

	$T_{\vec{v}}$	A_g	$R_{Z,\varphi}$	$S_{Z,k}$
Parallelität	ja	ja	ja	ja
Orientierung	ja	nein	ja	ja
Längen	ja	ja	ja	nein
Winkel	ja	ja	ja	ja

Aufgabe 3.2

$u = a + b + c + d = 3 + 5 + 6 + 8 = 22\,\text{cm}$

$u' = 33\,\text{cm}$

Streckungsfaktor: $k \cdot u = u' \quad \Rightarrow \quad k = u'/u = 33/22 = 3/2$

$a' = \frac{3}{2} \cdot 3\,\text{cm} = 4.5\,\text{cm}$

$b' = \frac{3}{2} \cdot 5\,\text{cm} = 7.5\,\text{cm}$

$c' = \frac{3}{2} \cdot 6\,\text{cm} = 9\,\text{cm}$

$d' = \frac{3}{2} \cdot 8\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$

Aufgabe 3.3

(a) $a = 15\,\text{cm},\ b = 18\,\text{cm},\ c = 12\,\text{cm}$
$a' = 20\,\text{cm},\ b' = 24\,\text{cm},\ c' = 16\,\text{cm}$

Ja, das Verhältnis entsprechender Seiten beträgt immer $\frac{4}{3}$.

(b) $\alpha = 57°,\ \beta = 42°$
$\beta' = 42°,\ \gamma' = 81°$

Ja, denn die Dreiecke stimmen in zwei Winkeln überein.

(c) $b = 12\,\text{m},\ \alpha = 30°,\ c = 10\,\text{m}$
$b' = 10\,\text{m},\ \alpha' = 30°,\ c' = 8\,\text{m}$

Nein, denn die Dreiecke stimmen nicht im Verhältnis entsprechender Seiten überein.

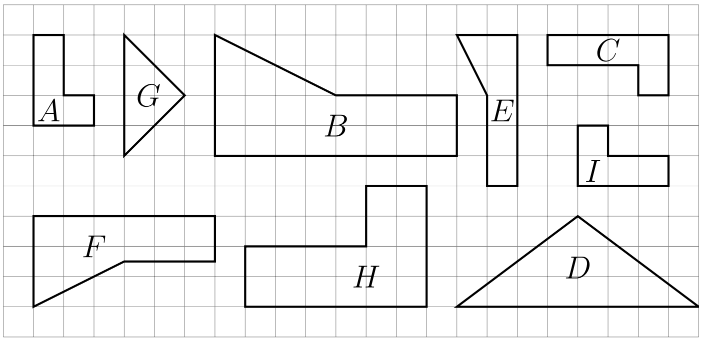
(d) $b = 10\,\text{cm},\ \gamma = 40°,\ c = 8\,\text{cm}$
$b' = 12\,\text{cm},\ \gamma' = 40°,\ c' = 9.6\,\text{cm}$

Nein, denn obwohl die Dreiecke im Verhältnis entsprechender Seiten übereinstimmen, ist der der kürzeren Seite (c) gegenüberliegende Winkel γ gegeben. Das ähnliche Dreieck ist daher nicht eindeutig bestimmt.

(e) $b = 10\,\text{cm},\ \beta = 50°,\ c = 8\,\text{cm}$
$b' = 12\,\text{cm},\ \beta' = 50°,\ c' = 9.6\,\text{cm}$

Ja, denn die Dreiecke stimmen im Verhältnis entsprechender Seiten überein *und* der der längeren Seite (b) gegenüberliegende Winkel β ist gegeben.

Aufgabe 3.4



$A \cong I \sim H$ sowie $B \sim F$

Aufgabe 3.5

Höhensatz:
$$\begin{aligned} h^2 &= p \cdot q \\ 24^2 &= p \cdot 40 \\ 576 &= 40p \\ p &= 14.4\,\text{cm} \end{aligned}$$

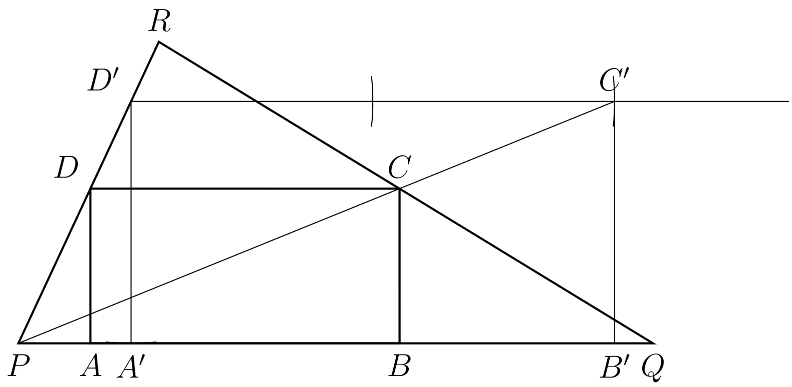
$c = q + p = 54.4\,\text{cm}$

Aufgabe 3.6

Satz des Euklid:
$$\begin{aligned} b^2 &= c \cdot q \\ 65 \cdot 65 &= c \cdot 25 = c \cdot 5 \cdot 5 \\ 13 \cdot 13 &= c \\ c &= 169\,\text{cm} \end{aligned}$$

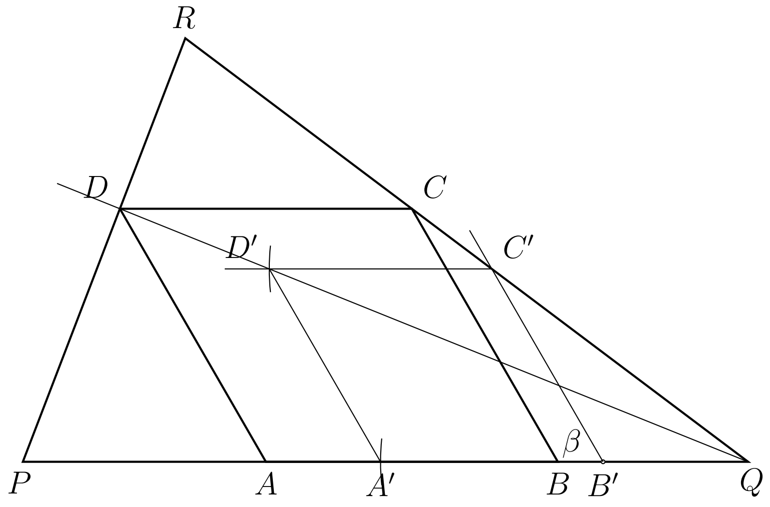
$$\begin{aligned} a &= \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{169^2 - 65^2} = \sqrt{169 \cdot 169 - 169 \cdot 25} \\ &= \sqrt{169(169-25)} = \sqrt{169} \cdot \sqrt{144} = 13 \cdot 12 = 156\,\text{cm} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.7

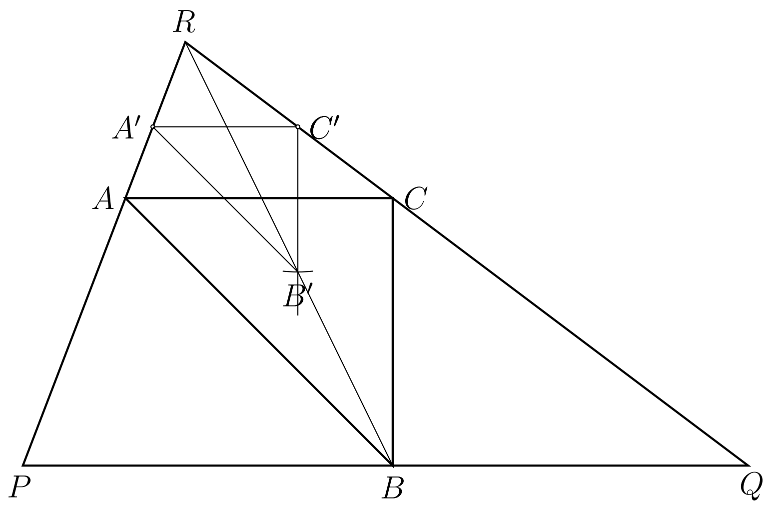


Es gibt eine zweite Lösung: Das Rechteck könnte doppelt so hoch wie breit sein anstatt doppelt so breit wie hoch sein.

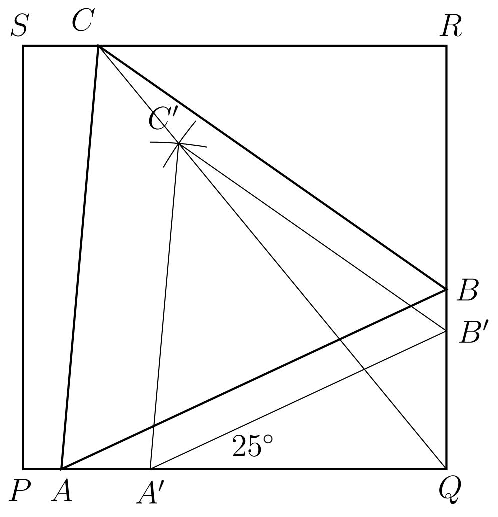
Aufgabe 3.8



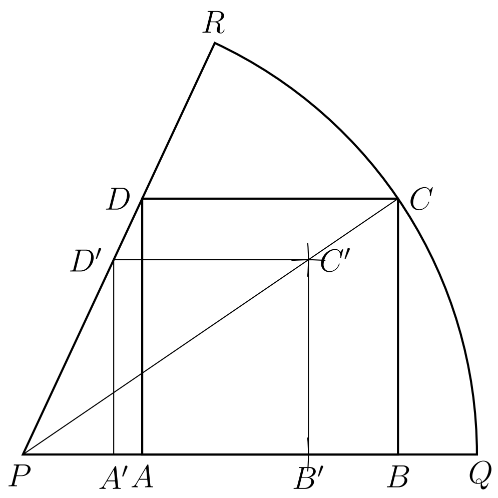
Aufgabe 3.9



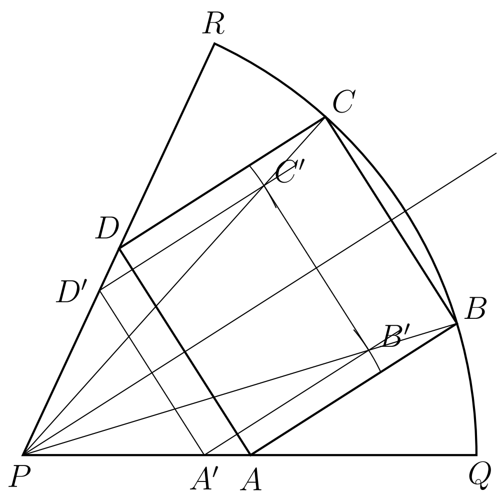
Aufgabe 3.10



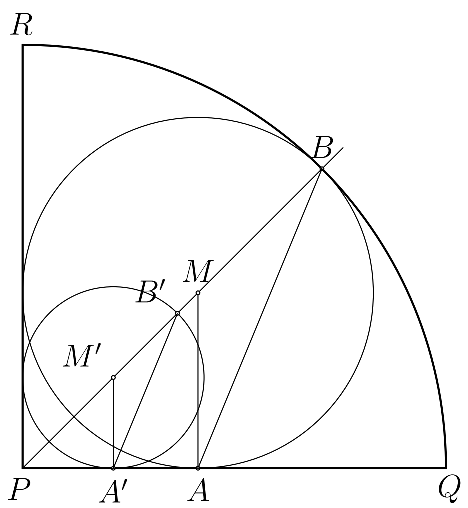
Aufgabe 3.11 (Lösung 1)



Aufgabe 3.11 (Lösung 2)



Aufgabe 3.12*



Aufgabe 3.13

Sekantensatz:
$$\begin{aligned} x \cdot 6 &= 2 \cdot (2+3) \\ 6x &= 10 \\ x &= \tfrac{5}{3} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.14

Sekantensatz:
$$\begin{aligned} 7 \cdot (7+5) &= 6 \cdot (6+x) \quad || : 6 \\ 14 &= 6 + x \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.15*

Sekantensatz:
$$\begin{aligned} x \cdot (x+5) &= 4 \cdot (4+2) \\ x^2 + 5x &= 24 \quad \text{(quadratische Gleichung)} \\ x^2 + 5x - 24 &= 0 \\ (x-3)(x+8) &= 0 \\ x_1 &= 3 \\ x_2 &= -8 \quad \text{nicht sinnvoll} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.16

Sehnensatz:
$$\begin{aligned} 5 \cdot x &= 4 \cdot 7 \\ 5x &= 28 \\ x &= 5.6 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.17

Sehnensatz:
$$\begin{aligned} 6 \cdot (x-6) &= 8 \cdot 3 \\ 6x - 36 &= 24 \\ 6x &= 60 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

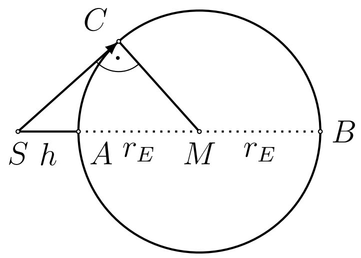
Aufgabe 3.18

Sehnen-Tangentensatz:
$$\begin{aligned} 4 \cdot (4+x) &= 7 \cdot 7 \\ 16 + 4x &= 49 \\ 4x &= 33 \\ x &= 8.25 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.19

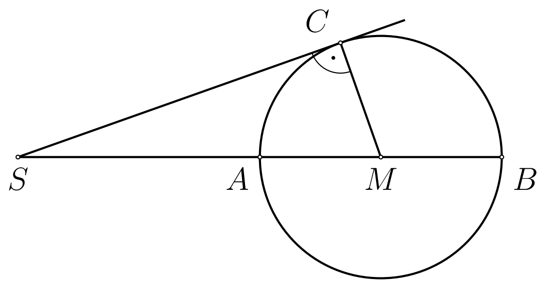
Sehnen-Tangentensatz:
$$\begin{aligned} x^2 &= 3.2 \cdot (3.2 + 1.8) \\ x^2 &= 3.2 \cdot 5 = 16 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.20



Sekanten-Tangentensatz:
$$\begin{aligned} |SA| \cdot |SB| &= |SC|^2 \\ 8.85 \cdot (8.85 + 2 \cdot 6370) &= |SC|^2 \\ |SC|^2 &= 112\,827 \\ |SC| &= 336\,\text{km} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.21



Sekanten-Tangentensatz:
$$\begin{aligned} |SA| \cdot |SB| &= |SC|^2 \\ (13 - r)(13 + r) &= 5^2 \\ 169 - r^2 &= 25 \\ r^2 &= 144 \\ r &= 12\,\text{cm} \end{aligned}$$