# Die quadratische Gleichung

### Begriff

Eine Gleichung der Form
$$ax^2 + bx + c = 0$$
mit den Koeffizienten $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ heisst *quadratische Gleichung* in $x$.

### 1. Fall ($b = 0$, reinquadratische Gleichung):

$$\begin{aligned} 2x^2 - 14 &= 0 \\ 2x^2 &= 14 \\ x^2 &= 7 \\ x_1 &= \sqrt{7} \\ x_2 &= -\sqrt{7} \end{aligned}$$

### 2. Fall ($c = 0$):

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2x &= 0 \\ 3x\left(x + \frac{2}{3}\right) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

### 3. Fall ($b \neq 0$, $c \neq 0$) leicht faktorisierbar:

(a)
$$\begin{aligned} x^2 + 4x - 21 &= 0 \\ (x-3)(x+7) &= 0 \\ x_1 &= 3 \\ x_2 &= 7 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 25 &= 0 \\ (x-5)^2 &= 0 \\ x_1 = x_2 &= 5 \end{aligned}$$

### 4. Fall ($b \neq 0$, $c \neq 0$) schwer faktorisierbar:

(a)
$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 4 &= 0 \\ x^2 - 6x &= -4 \\ x^2 - 6x + 9 &= -4 + 9 \quad \text{quadratische Ergänzung: } (6/2)^2 = 9 \\ (x-3)^2 &= 5 \\ x - 3 &= \pm\sqrt{5} \\ x_1 &= 3 + \sqrt{5} \\ x_2 &= 3 - \sqrt{5} \end{aligned}$$

(b) $x^2 + 2x + 3 = 0 \quad || - 3$

$$x^2 + 2x = -3$$

$$x^2 + 2x + 1 = -3 + 1 \quad \text{quadratische Ergänzung: } (2/1)^2 = 1$$

$$(x+1)^2 = -2$$

$L = \{\,\}$

*Nicht jede quadratische Gleichung hat eine Lösung.*

(c) $2x^2 - 6x - \frac{7}{2} = 0 \quad || : 2$

$$x^2 - 3x - \frac{7}{4} = 0 \quad (\text{Normalform, da } a = 1)$$

$$x^2 - 3x = \frac{7}{4} \quad \text{quadratische Ergänzung: } \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{7}{4} + \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{16}{4} = 4$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm 2 = \frac{4}{2}$$

$$x_1 = \frac{7}{2}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

**Die Verallgemeinerung**

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad || : a$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \text{(Normalform)}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad \text{quadr. Ergänzung: } \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Die *Diskriminante* $D = b^2 - 4ac$ entscheidet über die Anzahl der Lösungen.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{D}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{D}}{2a} \quad || - \frac{b}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{mit } D = b^2 - 4ac$$

$D < 0$: keine Lösung
$D = 0$: genau eine Lösung: $x_{1,2} = -b/2a$
$D > 0$: genau zwei Lösungen $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D})/2a$