Potenzen mit ganzen Exponenten

Theorie

Version vom 18. Mai 2020

1 Potenzen mit natürlichen Exponenten

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$

a: Basis
n: Exponent
a^n: Potenz

Lerne auswendig

	$a = 2$	$a = 3$	$a = 4$	$a = 5$	$a = 6$	$a = 7$	$a = 8$	$a = 9$	$a = 10$
$n = 2$									
$n = 3$									
$n = 4$									
$n = 5$									
$n = 6$									
$n = 7$									
$n = 8$									
$n = 9$									
$n = 10$									
$n = 11$									
$n = 12$									
$n = 13$									
$n = 14$									
$n = 15$									
$n = 16$									
$n = 17$									
$n = 18$									
$n = 19$									
$n = 20$									
$n = 21$									
$n = 22$									
$n = 23$									
$n = 24$									
$n = 25$									

Spezialfälle:

- $a^1 =$
- $1^n =$
- $0^n =$
- 0^0

Beispiel 1.1

$(-2)^4 =$

Beispiel 1.2

$(-5)^3 =$

Beispiel 1.3

$\sqrt{2}^6 =$

Beispiel 1.4

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$$

Beispiel 1.5

$$\left(\frac{-1}{4}\right)^3 =$$

Wissenschaftliche Darstellung von Zahlen

Eine Zahl wird als Produkt aus einer Dezimalzahl mit einer Zehnerpotenz dargestellt, so dass die erste Ziffer $\neq 0$ unmittelbar vor dem Dezimalpunkt steht.

Die Ziffernfolge wird manchmal auch *Mantisse* genannt.

Beispiel 1.6

$1\,234\,500\,000 =$

Beispiel 1.7

$436 \cdot 10^{19} =$

Beispiel 1.8

$0.00031 \cdot 10^{80} =$

Grosse Zehnerpotenzen

Im 15. Jahrhundert hat der französische Mathematiker Nicolas Chuquet aus dem italienischen Wort *millione* ($1000 \cdot 1000 = 10^6$) weitere Zahlwörter gebildet.

Als man im 17. Jahrhunderts dazu überging, Zahlen in Dreier- statt in Sechsergruppen darzustellen, haben einige Gelehrte gefordert, auch die Zahlennamen an diese Praxis anzupassen. Seither gibt es eine *lange Skala* und eine *kurze Skala*, die jeweils dieselben Bezeichnungen für die Millionenfachen bzw. die Tausenfachen des jeweiligen Vorgängers verwenden.

	Vorsatz	**lange Skala**	**kurze Skala**
10^6	Mega	Million	Million
10^9	Giga	Milliarde	Billion
10^{12}	Tera	Billion	Trillion
10^{15}	Peta	Billiarde	Quadrillion
10^{18}	Exa	Trillion	Quintillion
10^{21}	Zeta	Trilliarde	...
10^{24}	Yota	Quadrillion	
10^{27}		Quadrilliarde	
10^{30}		Quintillion	
...	...		

Kurze Skala: Australien, Brasilien, USA, Kanada (engl.), GB

Gemischte/andere Systeme: Russland, Türkei, Israel, China, Japan

Lange Skala: übrige Länder

Bemerkungen

- Wir verwenden im Mathematikunterricht nur die lange Skala.
- In der internationalen Finanzbranche dominiert die kurze Skala.
- Merkhilfe für den Zehnerexponenten der langen Skala:

	llion	lliarde
Mi...	$1 \cdot 6$	$1 \cdot 6 + 3$
Bi...	$2 \cdot 6$	$2 \cdot 6 + 3$
Tri...	$3 \cdot 6$	$3 \cdot 6 + 3$
Quadri...	$4 \cdot 6$	$4 \cdot 6 + 3$
Quinti...	$5 \cdot 6$	$5 \cdot 6 + 3$

Fun facts

- 1 Googol
- 1 Googolplex

Beispiel 1.9

Stelle 24.5 Trilliarden in der wissenschaftlichen Schreibweise dar.

Beispiel 1.10

Stelle $9.21 \cdot 10^{14}$ ohne Dezimalpunkt und mit dem grösstmöglichen Zahlwort dar.

Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

$2^5 \cdot 2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{5 Faktoren}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{3 Faktoren}} = 2^{5+3} = 2^8$

Allgemein: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ (M1)

Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die gemeinsame Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

Beispiel 1.11

$(-7)^9 \cdot (-7)^5$

Beispiel 1.12

$u^3 \cdot u \cdot u^4$

Beispiel 1.13

$x^{n+2} \cdot x^{n-1}$

Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponenten

$5^3 \cdot 2^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2) = (5 \cdot 2)^3$

Allgemein: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ (M2)

Zwei Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man das Produkt der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

Beispiel 1.14

$\left(\frac{1}{3}\right)^8 \cdot 6^8$

Beispiel 1.15

$(-a)^3 \cdot 2^3$

Beispiel 1.16

$\left(\frac{u}{v}\right)^{3n+2} \cdot \left(\frac{v}{w}\right)^{3n+2} \cdot \left(\frac{w}{v}\right)^{3n+2}$

Division von Potenzen mit gleicher Basis

$2^5 : 2^3 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2 \cdot 2 = 2^{5-3} = 2^2$

Allgemein: $a^n : a^m = a^{n-m} \quad (a \neq 0 \text{ und } n > m) \quad \text{(D1)}$

Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die gemeinsame Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert.

Beispiel 1.17

$(-15)^7 : (-15)^5$

Beispiel 1.18

$(-c)^{17} : (-c) : (-c)^{12}$

Beispiel 1.19

$r^{3n+4} : r^{2n+1}$

Division von Potenzen mit gleichem Exponenten

$7^3 : 2^3 = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} = \left(\frac{7}{2}\right)^3 = (7 : 2)^3$

Allgemein: $a^n : b^n = (a : b)^n \quad (b \neq 0) \quad \text{(D2)}$

Zwei Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man den Quotienten der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

Beispiel 1.20

$0.52^{10} : 0.26^{10}$

Beispiel 1.21

$$\left(\frac{p^5}{q^2}\right)^7 : \left(\frac{p^4}{q^3}\right)^7$$

Beispiel 1.22

$$(6x+9y)^{2n+1} : (2x+3y)^{2n+1}$$

Potenzen von Potenzen

$$\left(5^2\right)^3 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$$

Allgemein: $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} = a^{m \cdot n} = \left(a^m\right)^n \qquad \text{(P)}$

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert.

Beispiel 1.23

$$\left((-2)^3\right)^4$$

Beispiel 1.24

$$\left((-a)^5\right)^3$$

Beispiel 1.25

$$\left(x^{n+1}\right)^{n-1}$$

Potenztürme

Ohne Klammern werden Potenzen von Potenzen … von Potenzen von oben rechts nach unten links ausgewertet:

$$a^{b^{c^d}} = a^{\left(b^{\left(c^d\right)}\right)}$$

Beispiel 1.26

$$2^{3^2}$$

$$\left(2^3\right)^2$$

Beispiel 1.27

$2^{2^{2^2}}$

$\left((2^2)^2\right)^2$

Vermischte Beispiele

Beispiel 1.28

$12a^7 : (8a^2 \cdot 3a^4)$

Beispiel 1.29

$(r-s)^7 + (s-r)^7$

Beispiel 1.30

$\left(8p^{2x+1} + 6p^{2x}\right) : 2p^{2x-1}$

Beispiel 1.31

$z^2 \cdot (z^5 - z^4) : z^5$

Beispiel 1.32

$\left(3x^4 \cdot 2x^5\right)^3$

Beispiel 1.33

$(xy)^n : xy^n$

Beispiel 1.34

$$\frac{x^9 - x^7}{x^5 - x^3}$$

Beispiel 1.35

$(y^2-9)^5 : (y-3)^5$

Potenzen von Summen

Potenzen von Summen können induktiv, d. h. vom Einzelnen zum Gesamten berechnet werden.

$$(a+b)^n = \underbrace{\underbrace{\underbrace{(a+b)\cdot(a+b)}_{(a^2+2a+b^2)}\cdot(a+b)}_{(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)}\cdot(a+b)}_{\dots}\cdot\ldots\cdot(a+b)$$

Das Pascalsche Dreieck

Das *Pascalsche Dreieck* liefert ein einfaches Verfahren, um die Koeffizienten der ausmultiplizierten Potenzen $(a+b)^n$ zu bestimmen.

$$\begin{array}{ll}
(a+b)^0 = 1 & \quad\quad\quad\quad 1 \\
(a+b)^1 = a+b & \quad\quad\quad 1 \quad 1 \\
(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 & \quad\quad 1 \quad 2 \quad 1 \\
(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1
\end{array}$$

Die Exponenten von a nehmen von Summand zu Summand um 1 ab; diejenigen von b um 1 zu (beachte $a^0 = b^0 = 1$):

$a^n b^0,\ a^{n-1}b^1,\ a^{n-2}b^2,\ \ldots,\ a^2b^{n-2},\ a^1b^{n-1},\ a^0b^n$

Für die Potenzen von Differenzen $(a-b)^n$ ergeben sich alternierende (abwechselnde) Vorzeichen:

$(a-b)^0 = 1$
$(a-b)^1 = a-b$
$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$(a-b)^4 = a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$

Beispiel 1.36

$(3a+2b)^3$ 1 3 3 1

Beispiel 1.37

$(x-y)^5$

Einfache Potenzgleichungen

Eine *Potenzgleichung* ist eine Gleichung, bei der die Variable in der *Basis* vorkommt. Dieser Typ von Gleichung kann mit Hilfe dieser beiden Aussagen gelöst werden:

- Sind zwei Potenzen gleich und haben sie denselben *ungeraden* Exponenten, dann stimmen ihre Basen überein.

  $a^{2n-1} = b^{2n-1} \quad \Rightarrow \quad a = b$

- Sind zwei Potenzen gleich und haben sie denselben *geraden* Exponenten, dann stimmen ihre Basen bis auf ein Vorzeichen überein.

  $a^{2n} = b^{2n} \quad \Rightarrow \quad a = \pm b$

Beispiel 1.38

$x^3 = 27$

Beispiel 1.39

$x^4 \cdot x^2 = 64$

Beispiel 1.40

$(1-x)^5 : (1-x)^2 = -125$

Beispiel 1.41

$x^4 = -16$

Einfache Exponentialgleichungen

Eine *Exponentialgleichung* ist eine Gleichung, wo die Variable im *Exponenten* vorkommt.

Dieser Typ von Gleichung kann mit Hilfe dieser Aussage gelöst werden:

Sind zwei Potenzen gleich und haben sie dieselbe Basis, dann stimmen auch ihre Exponenten überein.

$a^m = a^n \quad \Rightarrow \quad m = n$

(Hier ist keine Unterscheidung nach geradem und ungeradem Exponenten nötig.)

Beispiel 1.42

$3^x = 243$

Beispiel 1.43

$4^x \cdot 2^x = 64$

Beispiel 1.44

$(-2)^x = 16$

Beispiel 1.45

$5^{2x+3} \cdot 5^{x+2} = 5^{4x+1}$

Beispiel 1.46

$(-5)^x = -25$

Einerziffern ganzzahliger Potenzen

Welches ist die Einerziffer von 153^{47}?

Trennt man die letzte Ziffer vom Rest der Zahl ab, so erhält man eine Summe $(150+3)^{47}$, die sich (theoretisch) mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks potenzieren lässt:

$$\begin{aligned} 153^{47} &= (150+3)^{47} \\ &= \underbrace{150^{47} + 47 \cdot 150^{46} \cdot 3^1 + \cdots + 47 \cdot 150^1 \cdot 3^{46}}_{\text{durch 10 teilbar}} + 3^{47} \end{aligned}$$

Da alle bis auf den letzten Summanden den Faktor 150 mindestens einmal enthalten, muss die Summe dieser Summanden durch 10 teilbar sein und somit auf 0 enden. Dies bedeutet, dass nur letzte Summand 3^{47} die Einerziffer bestimmt.

Wir bezeichnen die Einerziffer der natürlichen Zahl n mit $\mathrm{EZ}(n)$.

Beispiele: $\mathrm{EZ}(14) = 4$, $\mathrm{EZ}(34357) = 7$, $\mathrm{EZ}(5) = 5$ usw.

Was, wenn wir diese Funktion auf die Potenzen von 3 anwenden?

$\mathrm{EZ}(3^1) = \mathrm{EZ}(3) = 3$

$\mathrm{EZ}(3^2) = \mathrm{EZ}(9) = 9$

$\mathrm{EZ}(3^3) = \mathrm{EZ}(27) = 7$

$\mathrm{EZ}(3^4) = \mathrm{EZ}(81) = 1$

$\mathrm{EZ}(3^5) = \mathrm{EZ}(243) = 3$

$\mathrm{EZ}(3^6) = \mathrm{EZ}(729) = 9$

Offensichtlich gilt: $\mathrm{EZ}(3^1) = \mathrm{EZ}(3^5) = \mathrm{EZ}(3^9) = \ldots$

$\mathrm{EZ}(3^2) = \mathrm{EZ}(3^6) = \mathrm{EZ}(3^{10}) = \ldots$

und allgemein: $\mathrm{EZ}(3^n) = \mathrm{EZ}(3^{n+4})$

Nun können wir die Einerziffer von 153^{47} bestimmen, indem wir fortlaufend 4 vom Exponenten subtrahieren, bis wir auf eine der oben bestimmten Einzerziffer stossen:

$\mathrm{EZ}(153^{47}) = \mathrm{EZ}(3^{43}) = \mathrm{EZ}(3^{39}) = \cdots = \mathrm{EZ}(3^{7}) = \mathrm{EZ}(3^{3}) = 7$

Beispiel 1.47

Bestimme die Einzerziffer von 3584^{1252}.

Wie viele Teiler hat eine natürliche Zahl?

Wie viele Teiler hat 72:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72 $\Rightarrow$ 12 Teiler

Geht es auch ohne Abzählen?

Primfaktorzerlegung: $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$

Bilde (in Gedanken) eine Kreuztabelle mit allen Produkten aus allen Potenzen aller Primfaktoren:

$\times$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$
$3^0 = 1$	1	2	4	8
$3^1 = 3$	3	6	12	24
$3^2 = 9$	9	18	36	72

Die Tabelle liefert alle $(3+1) \cdot (2+1) = 12$ Teiler.

Allgemein gilt: Eine Zahl a mit der Primfaktorzerlegung

$$a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$$

hat $(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_k+1)$ Teiler. Der Summand 1 stammt von dem trivialen (einfachen) Teiler $p_1^0 = p_2^0 = \cdots = p_k^0 = 1$.

Beispiel 1.48

Wie viele Teiler hat 45?

Beispiel 1.49

Wie viele Teiler hat 32?

Beispiel 1.50

Wie viele Teiler hat 300?

Beispiel 1.51

Wie viele Teiler hat 23?

$23 = 23^1 \quad \Rightarrow \quad (1+1) = 2$ Teiler (Primzahl!)

2 Potenzen mit ganzen Exponenten

Definitionen

Multiplizieren wir 1 fortgesetzt mit einer reellen Zahl a, so erhalten wir die Potenzen a^n mit den natürlichen Exponenten n:

$$1 \xrightarrow{\cdot\, a} a^1 \xrightarrow{\cdot\, a} a^2 \xrightarrow{\cdot\, a} a^3 \xrightarrow{\cdot\, a} \ldots$$

Dies können wir auch umkehren, indem wir eine Potenz a^n mit einem natürlichen Exponenten n fortgesetzt durch a *dividieren*:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a^2 & \xrightarrow{:\, a} & a^1 & \xrightarrow{:\, a} & 1 & \xrightarrow{:\, a} & \frac{1}{a} & \xrightarrow{:\, a} & \frac{1}{a^2} & \xrightarrow{:\, a} & \ldots \\ a^2 & & a^1 & & a^0 & & a^{-1} & & a^{-2} & & \ldots \end{array}$$

Da im letzten Bild die Exponenten bei jeder Division um 1 kleiner werden, sind folgende Definitionen sinnvoll

- $a^0 = 1 \quad$ für $a \neq 0$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \quad$ für $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$

Dass in der zweiten Definition a nicht Null sein darf, sollte klar sein, da $0^n = 0$ ergibt und die Division durch Null ist nicht definiert ist.

Warum aber ist 0^0 nicht definiert? Wenn man möchte, dass alle Potenzgesetze auch für den Exponenten Null gültig sein sollen, erhält man ein Problem:

$0^0 = 0^{1-1} \overset{(D1)}{=} 0^1 : 0^1 = 0 : 0$ (nicht definiert!)

Glücklicherweise bleiben, bis auf die oben genannten Ausnahmen, die Potenzgesetze auch für negative ganze Exponenten gültig:

- (M1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ für $m, n \in \mathbb{Z}$
- (M2) $a^m \cdot b^m = (ab)^m$ für $m \in \mathbb{Z}$
- (D1) $a^m : a^n = a^{m-n}$ für $m, n \in \mathbb{Z}$
- (D2) $a^m : b^m = (a : b)^m$ für $m \in \mathbb{Z}$
- (P) $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$ für $m, n \in \mathbb{Z}$

Ist ein Exponent negativ, muss jeweils $a \neq 0$ bzw. $b \neq 0$ gelten.

Zur Erinnerung:

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ (Menge der ganzen Zahlen)

Andere Zahlensysteme

Unser 10er-System (Dezimalsystem) ist ein Stellenwertsystem zur Basis 10 mit den Ziffern 0, 1, ..., 9. Beispiel:

$$\begin{aligned} 2304 &= 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 4 \cdot 1 \\ &= 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

Zahlen lassen sich auch in Stellenwertsystemen mit anderen Basen schreiben.

Basis	Ziffern
2 (Binärsystem)	0, 1
3 (Ternärsystem)	0, 1, 2
...	...
7	0, 1, 2, ..., 5, 6
8 (Oktalsystem)	0, 1, 2, ..., 6, 7
9	0, 1, 2, ..., 7, 8
10 (Dezimalsystem)	0, 1, 2, ..., 8, 9
11*	0, 1, 2, ..., 9, A
12*	0, 1, 2, ..., A, B
...	...
16* (Hexadezimalsystem)	0, 1, 2, ..., E, F

* Da wir keine eigenen Symbole für die „Ziffern“ 10, 11, 12, ... kennen, verwenden wir dafür lateinische Buchstaben: A = 10, B = 11, C = 12, usw.

Eine Zahl, die nicht im Dezimalsystem dargestellt wird, kennzeichnen wir durch die Basis, die wir etwas tiefer gestellt, am rechten Ende der Zahl anfügen.

Beispiele: 5314_7, 67_8, 1111_2, AFFE_{16}

Beispiel 2.1

Umwandlung vom 5er-System ins Dezimalsystem:

$$\begin{aligned} 431_5 &= 4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 \\ &= 4 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 116 \end{aligned}$$

Beispiel 2.2

Umwandlung vom 2er-System ins Dezimalsystem:

$$\begin{aligned} 101101_2 &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 = 45 \end{aligned}$$

Beispiel 2.3

Umwandlung vom Hexadezimalsystem ins Dezimalsystem:

$$3\text{C}_{16} = 3 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 = 48 + 12 = 60$$

(Beachte: A = 10, B = 11, C = 12, ..., F = 15)

Beispiel 2.4

Wandle 35 ins 3er-System (Ternärsystem) um:

(a) Stelle alle Dreierpotenzen kleiner als 35 in absteigender Reihenfolge bereit: $27 = 3^3$, $9 = 3^2$, $3 = 3^1$, $1 = 3^0$

(b) Schöpfe die Zahl 35 in absteigender Reihenfolge durch diese Potenzen aus, wobei fehlende Potenzen mit dem Faktor berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} 35 &= 1 \cdot 27 + 0 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 \\ &= 1022_3 \end{aligned}$$

Beispiel 2.6

$$\begin{aligned} 23 &= 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 10111_2 \end{aligned}$$

Beispiel 2.7

Da es bei grossen Zahlen mühsam ist, die richtigen Potenzen der Basis zu erraten, verwendet man ein Verfahren, das mechanisch zum Ziel führt und sich auch gut zur Programmierung eines Computers eignet. Die Dezimalzahl wird fortlaufend durch die Basis dividert und der Rest notiert. Dies wiederholen wir so oft, bis der Quotient Null ist.

$$\begin{array}{rcccrlcc} 23 & : & 2 & = & 11 & \text{Rest} & 1 & \uparrow \\ 11 & : & 2 & = & 5 & \text{Rest} & 1 & \uparrow \\ 5 & : & 2 & = & 2 & \text{Rest} & 1 & \uparrow \\ 2 & : & 2 & = & 1 & \text{Rest} & 0 & \uparrow \\ 1 & : & 2 & = & 0 & \text{Rest} & 1 & \uparrow \end{array}$$

Die Null in der Quotientenspalte zeigt das Ende an. Nun liest man die Ziffern *von unten nach oben* ab: $23 = 10111_2$ (vgl. mit 2.6).

Beispiel 2.8

Bisher haben ganze Zahlen vom Dezimal- in andere Zahlensysteme umgerechnet und umgekehrt. Wir können dies auch mit rationalen oder sogar irrationalen Zahlen tun. Wandle 101.211_3 ins Dezimalsystem um.

$$\begin{aligned} 101.211_3 &= 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^{-2} + 1 \cdot 3^{-3} \\ &= 1 \cdot 9 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{1}{27} \\ &= 10 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = 10 + \frac{18}{27} + \frac{3}{27} + \frac{1}{27} = 10\tfrac{22}{27} \end{aligned}$$

Fehlt zwischen einer ganzen Zahl und einem Bruch das Operationszeichen, so steht implizit ein +.

Beispiel 2.9

Wandle 0.375 ins 2er-System um.

(a) Multipliziere die Dezimalzahl mit der Basis (2) und zerlege das Resultat in den gebrochen und den ganzzahligen Anteil.

(b) Wiederhole (a) mit dem gebrochenen Anteil so lange, bis der gebrochene Anteil 0 ist. Die Überträge bilden, *von oben nach unten gelesen*, die Darstellung der Zahl im anderen System.

$$\begin{array}{llllllllll}
0.375 & \cdot & 2 & = & 0.75 & = & 0.75 & \text{Übertrag} & 0 & \downarrow \\
0.75 & \cdot & 2 & = & 1.5 & = & 0.5 & \text{Übertrag} & 1 & \downarrow \\
0.5 & \cdot & 2 & = & 1 & = & 0 & \text{Übertrag} & 1 & \downarrow
\end{array}$$

$0.375 = 0.011_2$

Beispiel 2.10

Wandle 0.4 ins 3er-System um.

$$\begin{array}{lllllllll}
0.4 & \cdot & 3 & = & 1.2 & = & 0.2 & \text{Übertrag} & 1 \\
0.2 & \cdot & 3 & = & 0.6 & = & 0.6 & \text{Übertrag} & 0 \\
0.6 & \cdot & 3 & = & 1.8 & = & 0.8 & \text{Übertrag} & 1 \\
0.8 & \cdot & 3 & = & 2.4 & = & 0.4 & \text{Übertrag} & 2 \\
0.4 & \cdot & 3 & = & 1.2 & = & 0.2 & \text{Übertrag} & 1 \\
\ldots & \cdot & 3 & = & \ldots & = & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Offenbar wiederholt sich die Ziffernfolge nach vier Schritten. Also sind für die exakte Darstellung der Dezimalzahl 0.4 im 3er-System unendlich viele Stellen nötig:

$0.4 = 0.1012\,1012\,1012\,\ldots_3 = 0.\overline{1012}_3$