Potenzen mit ganzen Exponenten

Theorie

Version vom 23. März 2020

1 Potenzen mit natürlichen Exponenten

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

a:	Basis
n:	Exponent
a^n:	Potenz

Lerne auswendig

	$a = 2$	$a = 3$	$a = 4$	$a = 5$	$a = 6$	$a = 7$	$a = 8$	$a = 9$	$a = 10$
$n = 2$									
$n = 3$									
$n = 4$									
$n = 5$									
$n = 6$									
$n = 7$									
$n = 8$									
$n = 9$									
$n = 10$									
$n = 11$									
$n = 12$									
$n = 13$									
$n = 14$									
$n = 15$									
$n = 16$									
$n = 17$									
$n = 18$									
$n = 19$									
$n = 20$									
$n = 21$									
$n = 22$									
$n = 23$									
$n = 24$									
$n = 25$									

Spezialfälle:

- $a^1 =$
- $1^n =$
- $0^n =$
- 0^0

Beispiel 1.1

$(-2)^4 =$

Beispiel 1.2

$(-5)^3 =$

Beispiel 1.3

$\sqrt{2}^6 =$

Beispiel 1.4

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

Beispiel 1.5

$\left(\frac{-1}{4}\right)^3 =$

Wissenschaftliche Darstellung von Zahlen

Eine Zahl wird als Produkt aus einer Dezimalzahl mit einer Zehnerpotenz dargestellt, so dass die erste Ziffer $\neq 0$ unmittelbar vor dem Dezimalpunkt steht.

Die Ziffernfolge wird manchmal auch *Mantisse* genannt.

Beispiel 1.6

$1\,234\,500\,000 =$

Beispiel 1.7

$436 \cdot 10^{19} =$

Beispiel 1.8

$0.00031 \cdot 10^{80} =$

Grosse Zehnerpotenzen

Im 15. Jahrhundert hat der französische Mathematiker Nicolas Chuquet aus dem italienischen Wort *millione* ($1000 \cdot 1000 = 10^6$) weitere Zahlwörter gebildet.

Als man im 17. Jahrhunderts dazu überging, Zahlen in Dreier- statt in Sechsergruppen darzustellen, haben einige Gelehrte gefordert, auch die Zahlennamen an diese Praxis anzupassen. Seither gibt es eine *lange Skala* und eine *kurze Skala*, die jeweils dieselben Bezeichnungen für die Millionenfachen bzw. die Tausenfachen des jeweiligen Vorgängers verwenden.

	Vorsatz	**lange Skala**	**kurze Skala**
10^6	Mega	Million	Million
10^9	Giga	Milliarde	Billion
10^{12}	Tera	Billion	Trillion
10^{15}	Peta	Billiarde	Quadrillion
10^{18}	Exa	Trillion	Quintillion
10^{21}	Zeta	Trilliarde	...
10^{24}	Yota	Quadrillion	
10^{27}		Quadrilliarde	
10^{30}		Quintillion	
...	...		

Kurze Skala: Australien, Brasilien, USA, Kanada (engl.), GB

Gemischte/andere Systeme: Russland, Türkei, Israel, China, Japan

Lange Skala: übrige Länder

Bemerkungen

- Wir verwenden im Mathematikunterricht nur die lange Skala.
- In der internationalen Finanzbranche dominiert die kurze Skala.
- Merkhilfe für den Zehnerexponenten der langen Skala:

	llion	lliarde
Mi...	$1 \cdot 6$	$1 \cdot 6 + 3$
Bi...	$2 \cdot 6$	$2 \cdot 6 + 3$
Tri...	$3 \cdot 6$	$3 \cdot 6 + 3$
Quadri...	$4 \cdot 6$	$4 \cdot 6 + 3$
Quinti...	$5 \cdot 6$	$5 \cdot 6 + 3$

Fun facts

- 1 Googol
- 1 Googolplex

Beispiel 1.9

Stelle 24.5 Trilliarden in der wissenschaftlichen Schreibweise dar.

Beispiel 1.10

Stelle $9.21 \cdot 10^{14}$ ohne Dezimalpunkt und mit dem grösstmöglichen Zahlwort dar.

Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

$$2^5 \cdot 2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{5 Faktoren}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{3 Faktoren}} = 2^{5+3} = 2^8$$

Allgemein: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ (M1)

Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die gemeinsame Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

Beispiel 1.11

$(-7)^9 \cdot (-7)^5$

Beispiel 1.12

$u^3 \cdot u \cdot u^4$

Beispiel 1.13

$x^{n+2} \cdot x^{n-1}$

Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponenten

$$5^3 \cdot 2^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2) = (5 \cdot 2)^3$$

Allgemein: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ (M2)

Zwei Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man das Produkt der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

Beispiel 1.14

$\left(\frac{1}{3}\right)^8 \cdot 6^8$

Beispiel 1.15

$(-a)^3 \cdot 2^3$

Beispiel 1.16

$\left(\frac{u}{v}\right)^{3n+2} \cdot \left(\frac{v}{w}\right)^{3n+2} \cdot \left(\frac{w}{v}\right)^{3n+2}$

Division von Potenzen mit gleicher Basis

$2^5 : 2^3 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2 \cdot 2 = 2^{5-3} = 2^2$

Allgemein: $a^n : a^m = a^{n-m} \quad (a \neq 0 \text{ und } n > m) \quad$ (D1)

Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die gemeinsame Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert.

Beispiel 1.17

$(-15)^7 : (-15)^5$

Beispiel 1.18

$(-c)^{17} : (-c) : (-c)^{12}$

Beispiel 1.19

$r^{3n+4} : r^{2n+1}$

Division von Potenzen mit gleichem Exponenten

$7^3 : 2^3 = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} = \left(\frac{7}{2}\right)^3 = (7 : 2)^3$

Allgemein: $a^n : b^n = (a : b)^n \quad (b \neq 0) \quad$ (D2)

Zwei Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man den Quotienten der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

Beispiel 1.20

$0.52^{10} : 0.26^{10}$

Beispiel 1.21

$\left(\frac{p^5}{q^2}\right)^7 : \left(\frac{p^4}{q^3}\right)^7$

Beispiel 1.22

$(6x + 9y)^{2n+1} : (2x + 3y)^{2n+1}$

Potenzen von Potenzen

$\left(5^2\right)^3 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$

Allgemein: $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} = a^{m \cdot n} = \left(a^m\right)^n \qquad \text{(P)}$

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert.

Beispiel 1.23

$\left((-2)^3\right)^4$

Beispiel 1.24

$\left((-a)^5\right)^3$

Beispiel 1.25

$\left(x^{n+1}\right)^{n-1}$

Potenztürme

Ohne Klammern werden Potenzen von Potenzen ... von Potenzen von oben rechts nach unten links ausgewertet:

$a^{b^{c^d}} = a^{\left(b^{\left(c^d\right)}\right)}$

Beispiel 1.26

2^{3^2}

$(2^3)^2$

Beispiel 1.27

$2^{2^{2^2}}$

$\left((2^2)^2\right)^2$

Vermischte Beispiele

Beispiel 1.28

$12a^7 : (8a^2 \cdot 3a^4)$

Beispiel 1.29

$(r-s)^7 + (s-r)^7$

Beispiel 1.30

$\left(8p^{2x+1} + 6p^{2x}\right) : 2p^{2x-1}$

Beispiel 1.31

$z^2 \cdot (z^5 - z^4) : z^5$

Beispiel 1.32

$\left(3x^4 \cdot 2x^5\right)^3$

Beispiel 1.33

$(xy)^n : xy^n$

Beispiel 1.34

$\dfrac{x^9 - x^7}{x^5 - x^3}$

Beispiel 1.35

$(y^2 - 9)^5 : (y - 3)^5$

Potenzen von Summen

Potenzen von Summen können induktiv, d. h. vom Einzelnen zum Gesamten berechnet werden.

$$(a+b)^n = \underbrace{\underbrace{\underbrace{(a+b)\cdot(a+b)}_{(a^2+2a+b^2)}\cdot(a+b)}_{(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)}\cdot(a+b)}_{\ldots}\cdot\ldots\cdot(a+b)$$

Das Pascalsche Dreieck

Das *Pascalsche Dreieck* liefert ein einfaches Verfahren, um die Koeffizienten der ausmultiplizierten Potenzen $(a+b)^n$ zu bestimmen.

$$\begin{array}{ll}
(a+b)^0 = 1 & \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \end{array} \\
(a+b)^1 = a+b & \begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 1 & & & \end{array} \\
(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 & \begin{array}{ccccccccc} & & 1 & & 2 & & 1 & & \end{array} \\
(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & \begin{array}{ccccccccc} & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \end{array} \\
(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 & \begin{array}{ccccccccc} 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}
\end{array}$$

Die Exponenten von a nehmen von Summand zu Summand um 1 ab; diejenigen von b um 1 zu (beachte $a^0 = b^0 = 1$):

$a^n b^0,\ a^{n-1}b^1,\ a^{n-2}b^2,\ \ldots,\ a^2b^{n-2},\ a^1b^{n-1},\ a^0b^n$

Für die Potenzen von Differenzen $(a-b)^n$ ergeben sich alternierende (abwechselnde) Vorzeichen:

$(a-b)^0 = 1$

$(a-b)^1 = a-b$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

Beispiel 1.36

$(3a + 2b)^3$ 1 3 3 1

Beispiel 1.37

$(x - y)^5$

Einfache Potenzgleichungen

Eine *Potenzgleichung* ist eine Gleichung, bei der die Variable in der *Basis* vorkommt. Dieser Typ von Gleichung kann mit Hilfe dieser beiden Aussagen gelöst werden:

- Sind zwei Potenzen gleich und haben sie denselben *ungeraden* Exponenten, dann stimmen ihre Basen überein.

  $a^{2n-1} = b^{2n-1} \quad \Rightarrow \quad a = b$

- Sind zwei Potenzen gleich und haben sie denselben *geraden* Exponenten, dann stimmen ihre Basen bis auf ein Vorzeichen überein.

  $a^{2n} = b^{2n} \quad \Rightarrow \quad a = \pm b$

Beispiel 1.38

$x^3 = 27$

Beispiel 1.39

$x^4 \cdot x^2 = 64$

Beispiel 1.40

$(1 - x)^5 : (1 - x)^2 = -125$

Beispiel 1.41

$x^4 = -16$

Einfache Exponentialgleichungen

Eine *Exponentialgleichung* ist eine Gleichung, wo die Variable im *Exponenten* vorkommt.

Dieser Typ von Gleichung kann mit Hilfe dieser Aussage gelöst werden:

Sind zwei Potenzen gleich und haben sie dieselbe Basis, dann stimmen auch ihre Exponenten überein.

$a^m = a^n \quad \Rightarrow \quad m = n$

(Hier ist keine Unterscheidung nach geradem und ungeradem Exponenten nötig.)

Beispiel 1.42

$3^x = 243$

Beispiel 1.43

$4^x \cdot 2^x = 64$

Beispiel 1.44

$(-2)^x = 16$

Beispiel 1.45

$5^{2x+3} \cdot 5^{x+2} = 5^{4x+1}$

Beispiel 1.46

$(-5)^x = -25$

Einerziffern ganzzahliger Potenzen

Welches ist die Einerziffer von 153^{47}?

Trennt man die letzte Ziffer vom Rest der Zahl ab, so erhält man eine Summe $(150+3)^{47}$, die sich (theoretisch) mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks potenzieren lässt:

$$\begin{aligned} 153^{47} &= (150+3)^{47} \\ &= \underbrace{150^{47} + 47 \cdot 150^{46} \cdot 3^1 + \cdots + 47 \cdot 150^1 \cdot 3^{46}}_{\text{durch 10 teilbar}} + 3^{47} \end{aligned}$$

Da alle bis auf den letzten Summanden den Faktor 150 mindestens einmal enthalten, muss die Summe dieser Summanden durch 10 teilbar sein und somit auf 0 enden. Dies bedeutet, dass nur letzte Summand 3^{47} die Einerziffer bestimmt.

Wir bezeichnen die Einerziffer der natürlichen Zahl n mit $\mathrm{EZ}(n)$.

Beispiele: $\mathrm{EZ}(14) = 4$, $\mathrm{EZ}(34357) = 7$, $\mathrm{EZ}(5) = 5$ usw.

Was, wenn wir diese Funktion auf die Potenzen von 3 anwenden?

$\mathrm{EZ}(3^1) = \mathrm{EZ}(3) = 3$

$\mathrm{EZ}(3^2) = \mathrm{EZ}(9) = 9$

$\mathrm{EZ}(3^3) = \mathrm{EZ}(27) = 7$

$\mathrm{EZ}(3^4) = \mathrm{EZ}(81) = 1$

$\mathrm{EZ}(3^5) = \mathrm{EZ}(243) = 3$

$\mathrm{EZ}(3^6) = \mathrm{EZ}(729) = 9$

Offensichtlich gilt: $\mathrm{EZ}(3^1) = \mathrm{EZ}(3^5) = \mathrm{EZ}(3^9) = \ldots$
$\mathrm{EZ}(3^2) = \mathrm{EZ}(3^6) = \mathrm{EZ}(3^{10}) = \ldots$

und allgemein: $\mathrm{EZ}(3^n) = \mathrm{EZ}(3^{n+4})$

Nun können wir die Einerziffer von 153^{47} bestimmen, indem wir fortlaufend 4 vom Exponenten subtrahieren, bis wir auf eine der oben bestimmten Einzerziffer stossen:

$\mathrm{EZ}(153^{47}) = \mathrm{EZ}(3^{43}) = \mathrm{EZ}(3^{39}) = \cdots = \mathrm{EZ}(3^{7}) = \mathrm{EZ}(3^{3}) = 7$

Beispiel 1.47

Bestimme die Einzerziffer von 3584^{1252}.

Wie viele Teiler hat eine natürliche Zahl?

Wie viele Teiler hat 72:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72 $\Rightarrow$ 12 Teiler

Geht es auch ohne Abzählen?

Primfaktorzerlegung: $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$

Bilde (in Gedanken) eine Kreuztabelle mit allen Produkten aus allen Potenzen aller Primfaktoren:

$\times$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$
$3^0 = 1$	1	2	4	8
$3^1 = 3$	3	6	12	24
$3^2 = 9$	9	18	36	72

Die Tabelle liefert alle $(3+1) \cdot (2+1) = 12$ Teiler.

Allgemein gilt: Eine Zahl a mit der Primfaktorzerlegung

$$a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$$

hat $(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_k+1)$ Teiler. Der Summand 1 stammt von dem trivialen (einfachen) Teiler $p_1^0 = p_2^0 = \cdots = p_k^0 = 1$.

Beispiel 1.48

Wie viele Teiler hat 45?

Beispiel 1.49

Wie viele Teiler hat 32?

Beispiel 1.50

Wie viele Teiler hat 300?

Beispiel 1.51

Wie viele Teiler hat 23?

$23 = 23^1 \quad \Rightarrow \quad (1+1) = 2$ Teiler (Primzahl!)

2 Potenzen mit ganzen Exponenten

In Bearbeitung ...