Mengenlehre (Repetition)

Theorie (L)

Grundbegriffe

Eine *Menge* M ist eine Zusammenfassung von realen oder gedachten Objekten, die *Elemente* genannt werden.

Gehört ein Element x zur Menge M, schreibt man $x \in M$ [sprich: „x ist Element von M"].

Gehört ein Element x *nicht* zur Menge M, schreibt man $x \notin M$ [sprich: „x ist nicht Element von M"].

Die Menge, welche keine Elemente hat, wird *die leere Menge* genannt und mit den Symbolen $\{\,\}$ oder $\emptyset$ dargestellt.

Die Anzahl der Elemente einer Menge M wird *Mächtigkeit* der Menge genannt und mit $|M|$ abgekürzt.

Beispiel 1

$M = \{▶, ✱, ♥, ϟ\}$

(b) $✱ \in M$

(c) $■ \notin M$

(d) $|M| = 4$

(e) $|\emptyset| = 0$

Mengenrelationen

Sind A und B Mengen und gilt für jedes $x \in A$, dass auch $x \in B$, so ist A eine *Teilmenge* von B. Diese Beziehung wird symbolisch durch $A \subset B$ [sprich: „A ist Teilmenge von B"] abgekürzt.

Ist A eine Teilmenge von B, so sagt man auch B sei eine *Obermenge* von A, was durch $B \supset A$ [sprich: „B ist Obermenge von A"] dargestellt wird.

Zwei Mengen A und B sind gleich $(A = B)$ wenn $A \subset B$ *und* $B \subset A$ gilt.

Beispiel 2

$A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 3, 4\}$, $C = \{1, 2\}$, $D = \{3, 1\}$

Setze eines der Symbole $\subset$, $\supset$, $=$ oder $\neq$ ein.

(a) $A \subset B$

(b) $A \neq C$

(c) $A = D$

(d) $B \neq C$

(e) $B \supset D$

(f) $C \neq D$

Mengenoperationen

Es seien A und B beliebige Mengen.

- $A \cup B = \{x \colon x \in A \text{ oder}^* \ x \in B\}$ *Vereinigungsmenge*
- $A \cap B = \{x \colon x \in A \text{ und } x \in B\}$ *Schnittmenge*
- $A \setminus B = \{x \colon x \in A \text{ und } x \notin B\}$ *Differenzenmenge*
- $A \times B = \{(x, y) \colon x \in A \text{ und } x \in B\}$ *Produktmenge*
- $\mathcal{P}(A) = \{M \colon M \subset A\}$ *Potenzmenge*

* „oder“ wird hier nicht im ausschliessenden Sinne gebraucht.

Beispiel 3

$A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$

(a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

(b) $A \cap B = \{2\}$

(c) $A \setminus B = \{1\}$

(d) $B \setminus A = \{3, 4\}$

(e) $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$

(f) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

(g) $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$

Zahlenbereiche

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ natürliche Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ natürliche Zahlen mit der Null

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ganze Zahlen

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{z}{n} \colon z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ rationale Zahlen

$\mathbb{R} = \{x \colon x \text{ hat eine endliche oder unendliche Dezimaldarstellung}\}$ reelle Zahlen

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Intervalle reeller Zahlen

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}\colon a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}\colon a < x < b\}$ (offenes Intervall)

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}\colon a \leq x < b\}$ (halboffenes Intervall)

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}\colon a < x \leq b\}$ (halboffenes Intervall)

$(-\infty, \infty) = \{x \in \mathbb{R}\colon -\infty < x < \infty\} = \mathbb{R}$

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}\colon -\infty < x \leq b\}$ (halboffenes Intervall)

$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}\colon a < x < \infty\}$ (offenes Intervall)

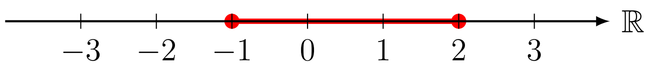
usw.

Beispiel 4

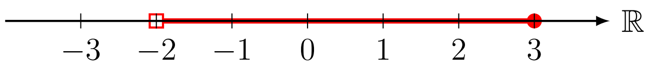
Stelle die Mengen am Zahlenstrahl graphisch dar.

● Punkt ist eingeschlossen □ Punkt ist ausgeschlossen

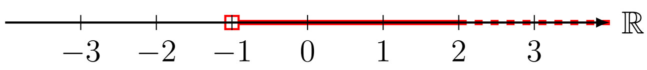
(a) $[-1, 2]$



(b) $(-2, 3]$



(c) $(-1, \infty)$



(d) $\{0, 2\}$