

Aufgabe 1.1

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \text{ mit } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 1.2

- (a) $5x - 2yz = 4$ nein (wegen $y \cdot z$)
 (b) $4a - 5c = d + 7$ ja ($\rightarrow 4a - 5c - d = 7$)
 (c) $\sqrt{2}x_1 + 6x_2 - x_3 = 0$ ja (Wurzel betrifft nicht die Variable)

Aufgabe 1.3

Term	Variable	Koeffizient
(a) $4x_1 - 3x_2 + 5x_3$	x_2	-3
(b) $274p + 115q + r - 39s$	r	1
(c) $7a + \frac{1}{2}b + 3d$	c	0

Aufgabe 1.4

- (a) $(3, 2) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ wahr
 (b) $(4, 7, -3) \in \mathbb{N}^3$ falsch [$(4, 7, -7) \in \mathbb{Z}^3$]
 (c) $\{5, 8, 3\} = \{5, 3, 8\}$ wahr (Mengen: Reihenfolge egal)
 (d) $(5, 8, 3) = (5, 3, 8)$ falsch (Tupel: Reihenfolge wichtig)
 (e) $\{1, 1, 2\} = \{1, 2\}$ wahr (Mengen: keine Wiederholungen)
 (f) $(1, 1, 2) = (1, 2)$ falsch (Tupel: Wiederholungen möglich)

Aufgabe 1.5

- (a) $\{3, 2\} \times \{4, 1\} = \{(3, 4), (3, 1), (2, 4), (2, 1)\}$
 (b) $\{9\} \times \{2, 5, 7\} \times \{3\} = \{(9, 2, 3), (9, 5, 3), (9, 7, 3)\}$
 (c) $\{a, b\}^3 = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (b, a, a), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b)\}$

Aufgabe 1.6

- (a) Eine Lösung einer Gleichung ist ein n -Tupel von (reellen) Zahlen, welche die Gleichung erfüllen.
 (b) Die Lösungsmenge einer Gleichung ist die Menge *aller* Lösungen der Gleichung.

Aufgabe 1.7

- (a) ja denn $3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 0$ (wahr)
(b) ja, denn $3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 5 = 23$ (wahr)

Aufgabe 1.8

$$2x + 4y - z = 1 \quad \Rightarrow \quad z = 2x + 4y + 1$$

$$L = \{(x, y, 2x + y + 1) : z \in \mathbb{R}\}$$

Aufgabe 1.9

$$2x + 3y = 27$$

$$3y = 27 - 2x$$

$$y = 9 - \frac{2}{3}x$$

$x = 1, x = 2, \dots$ einsetzen und prüfen, ob auch $y \in \mathbb{N}$ gilt.

$$L = \{(3, 7), (6, 5), (9, 3), (12, 1)\}$$

Aufgabe 1.10

- (a) eine Gerade in der Ebene
(b) eine Ebene im Raum

Aufgabe 1.11

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 = b_2$$

$$a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 = b_3$$

mit $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{R}$

Aufgabe 1.12

- (a) Eine Lösung des Gleichungssystems ist ein n -Tupel, das *alle* Gleichungen des Systems erfüllt.
(b) Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist die Menge *aller* Lösungen des Systems.

Aufgabe 1.13

<i>Lösungsmenge</i>	<i>geometrische Deutung</i>
keine Lösung	die Geraden sind parallel
genau eine Lösung	die Geraden schneiden sich
unendlich viele Lösungen	die Geraden fallen zusammen

Aufgabe 1.14

(a) $L = \{(5, 2)\}$

(b) $L = \{(4, 3)\}$

Aufgabe 1.15

(a) $L = \{(x, 3 - x) : x \in \mathbb{R}\}$

(b) $L = \{\}$

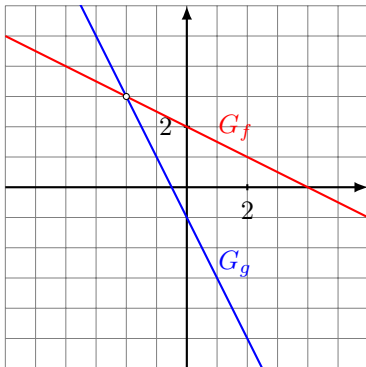
Aufgabe 1.16

(a) $L = \{(5, 3)\}$

(b) $L = \{(4, 4)\}$

Aufgabe 1.17

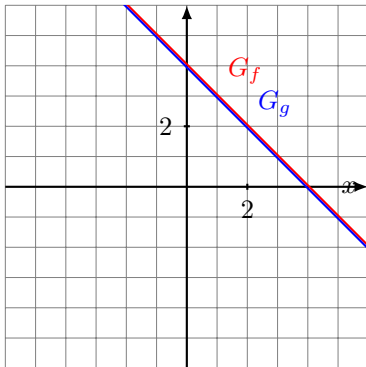
$$\begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 2x + y = -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} f: y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ g: y = -2x - 1 \end{array}$$



$$L = \{(-2, 3)\}$$

Aufgabe 1.18

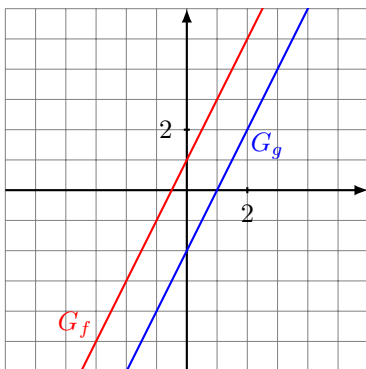
$$\begin{aligned} 6x + 6y &= 24 & \Rightarrow & f: y = -x + 4 \\ -4x - 4y &= -16 & & g: y = -x + 4 \end{aligned}$$



$$L = \{(x, -x + 4) : x \in \mathbb{R}\}$$

Aufgabe 1.19

$$\begin{aligned} y - 2x &= 1 & \Rightarrow & f: y = 2x + 1 \\ 2x - y &= 2 & & g: y = 2x - 2 \end{aligned}$$



$$L = \{\}$$

Aufgabe 2.1

$$y = 5x + 3 \quad (1)$$

$$y = 4x - 2 \quad (2)$$

$$\text{Setze (1) in (2) ein: } 5x + 3 = 4x - 2$$

$$x = -5$$

$$\text{Setze } x = -5 \text{ in (1) ein: } y = 5 \cdot (-5) + 3 = -22$$

$$L = \{(-5, -22)\}$$

Aufgabe 2.2

$$y = 2x - 3 \quad (1)$$

$$5x - 3y = 4 \quad (2)$$

Setze (1) in (2) ein: $5x - 3(2x - 3) = 4$

$$5x - 6x + 9 = 4$$

$$-x = -5$$

$$x = 5$$

Setze $x = 5$ in (1) ein: $y = 2 \cdot 5 - 3 = 7$

$$L = \{(5, 7)\}$$

Aufgabe 2.3

$$x + y = 2 \quad (1)$$

$$4(x + y) = 3x + 11 \quad (2)$$

(1) in (2) einsetzen: $4 \cdot 2 = 3x + 11$

$$3x = -3$$

$$x = -1$$

$x = -1$ in (1) einsetzen: $-1 + y = 2 \Rightarrow y = 3$

$$L = \{(-1, 3)\}$$

Aufgabe 2.4

$$x^2 - 3y = 7 \quad (1)$$

$$2x^2 - 5y = 17 \quad (2)$$

(1) nach x^2 auflösen: $x^2 = 7 + 3y$ (3)

(3) in (2) einsetzen: $2(7 + 3y) - 5y = 17$

$$14 + 6y - 5y = 17$$

$$y = 3$$

$y = 3$ in (3) einsetzen: $x^2 = 7 + 9 = 16$

$$x = \pm 4$$

$$L = \{(4, 3), (-4, 3)\}$$

Aufgabe 2.5

$$L = \{(1, 0, 3, -2)\}$$

Aufgabe 3.1

$$2x + 3y = 6 \quad (1)$$

$$5x - 3y = 36 \quad (2)$$

$$(1) + (2): 7x = 42$$

$$x = 6$$

$$x = 6 \text{ in (1) einsetzen: } 12 + 3y = 6$$

$$3y = -6$$

$$y = -2$$

$$L = \{(6, -2)\}$$

Aufgabe 3.2

$$4x - 5y = 4 \quad (1)$$

$$8x - 7y = 32 \quad (2)$$

$$(-2) \cdot (1) + (2): 10y - 7y = -8 + 32$$

$$3y = 24$$

$$y = 8$$

$$y = 8 \text{ in (1) einsetzen: } 4x - 40 = 44y = 44$$

$$x = 11$$

$$L = \{(11, 8)\}$$

Aufgabe 3.3

$$2x - y = 3 \quad (1)$$

$$-2x + y = -3 \quad (2)$$

$$(1)+(2): 0 = 0$$

$$L = \{(x, 2x - 3) : x \in \mathbb{R}\}$$

Aufgabe 3.4

$$7x + 2y = 17 \quad (1)$$

$$8x - 3y = 67 \quad (2)$$

$$3 \cdot (1) + 2 \cdot (2): 21x + 16x = 51 + 134$$

$$37x = 185$$

$$x = 5$$

$$\begin{aligned}
 x = 5 \text{ in (1) einsetzen: } 35 + 2y &= 17 \\
 2y &= -18 \\
 y &= -9
 \end{aligned}$$

$$L = \{(5, -9)\}$$

Aufgabe 3.5

$$\begin{aligned}
 4x - 3y^2 &= 18 \quad (1) \\
 -2x + 3y^2 &= -6 \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1) + (2): 2x &= 12 \\
 x &= 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x = 6 \text{ in (2) einsetzen: } -12 + 3y^2 &= -6 \\
 3y^2 &= 6 \\
 y^2 &= 2 \\
 y_{1,2} &= \pm\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$L = \{(6, \sqrt{2}), (6, -\sqrt{2})\}$$

Aufgabe 3.6

$$\begin{aligned}
 2x - 4y &= 3 \quad (1) \\
 3x - 6y &= 4 \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$3 \cdot (1) + (-2) \cdot (2): 0 = 1$$

$$L = \{\}$$

Aufgabe 4.1

$$\begin{aligned}
 2x + 3y - 5z &= 23 \\
 -x - 2y + 2z &= -11 \\
 x + 3y - 4z &= 16
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc}
 2 & 3 & -5 & 23 \\
 -1 & -2 & 2 & -11 \\
 1 & 3 & -4 & 16
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right\}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 3 & -4 & 16 \\
 -1 & -2 & 2 & -11 \\
 2 & 3 & -5 & 23
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \leftarrow \cdot 1 \\ \leftarrow + \end{array} \right\} \\
 \left. \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-2) \\ \leftarrow + \end{array} \right\}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & -4 & 16 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & -9 \end{array} \begin{array}{l} \\ \left. \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \leftarrow + \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & -4 & 16 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & -4 & 16 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x + 3y - 4z &= 16 \\ y - 2z &= 5 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

Rückwärtseinsetzen:

$$y = 5 + 2z = 5 - 4 = 1$$

$$x = 16 - 3y + 4z = 16 - 3 - 8 = 5$$

$$L = \{(5, 1, -2)\}$$

Aufgabe 4.2

$$\begin{aligned} -7x - 3y &= -2 \\ 5x + y + z &= -9 \\ 4x + 4z &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} 4 & 0 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 1 & -9 \\ -7 & -3 & 0 & -2 \end{array} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & -9 \\ -7 & -3 & 0 & -2 \end{array} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \cdot (-5) \\ \leftarrow + \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \cdot 7 \\ \leftarrow + \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -19 \\ 0 & -3 & 7 & 12 \end{array} \begin{array}{l} \\ \left. \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \leftarrow + \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -19 \\ 0 & 0 & -5 & -45 \end{array} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x + z &= 2 \\ y - 4z &= -19 \\ z &= 9 \end{aligned}$$

Rückwärtseinsetzen:

$$y = -19 + 4z = -19 + 36 = 17$$

$$x = 2 - z = 2 - 9 = -7$$

$$L = \{(-7, 17, 9)\}$$

Aufgabe 5.1

$$\text{Substitution: } \frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b$$

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 4 \quad \Rightarrow \quad 2a + b = 4 \quad (1)$$

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{y} = \frac{11}{3} \quad \Rightarrow \quad 3a - 2b = \frac{11}{3} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot (1) + (2): \quad 7a &= 8 + \frac{11}{3} = \frac{35}{3} \\ a &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a = \frac{5}{3} \text{ in (1) einsetzen: } \frac{10}{3} + b &= 4 = \frac{12}{3} \\ b &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Resubstitution: } \frac{1}{x} = a = \frac{5}{3} &\Rightarrow x = \frac{3}{5} \\ \frac{1}{y} = b = \frac{2}{3} &\Rightarrow y = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$L = \left\{ \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{2} \right) \right\}$$

Aufgabe 5.2

$$\text{Substitution: } x^2 = a, y^2 = b$$

$$x^2 - 5y^2 = 24 \quad \Rightarrow \quad a - 5b = 24 \quad (1)$$

$$7x^2 + 6y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad 7a + 6b = 4 \quad (2)$$

$$(1) \text{ nach } a \text{ auflösen: } a = 5b + 24 \quad (3)$$

$$(3) \text{ in (2) einsetzen: } 7(5b + 24) + 6b = 4$$

$$35b + 168 + 6b = 4$$

$$41b = -164$$

$$b = -4$$

$$b = -4 \text{ in (3) einsetzen: } a = 5b + 24 = -20 + 24 = 4$$

$$\text{Resubstitution: } x^2 = a = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

$$y^2 = b = -4 \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung}$$

$$L = \{ \}$$

Aufgabe 5.3

Substitution: $\sqrt{x} = a$, $\sqrt{y} = b$

$$2\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = 13 \quad \Rightarrow \quad 2a + 5b = 13 \quad (1)$$

$$3\sqrt{x} - 5\sqrt{y} = 7 \quad \Rightarrow \quad 3a - 5b = 7 \quad (2)$$

$$(1) + (2): 5a = 20$$

$$a = 4$$

$a = 4$ in (1) einsetzen: $8 + 5b = 13$

$$5b = 5$$

$$b = 1$$

Resubstitution: $\sqrt{x} = a = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 16$

$$\sqrt{y} = b = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1$$

$$L = \{(16, 1)\}$$