Funktionen

Theorie (L)

Inhaltsverzeichnis

Version vom 30. August 2022

1 Der Funktionsbegriff

Definition

Eine Funktion f ist eine Vorschrift, die *jedem* Element x aus einem Definitionsmenge D *genau ein* Element y aus einem Wertemenge W zuordnet.

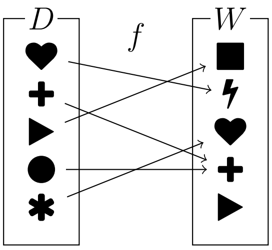
Die Zuordnung wird meist durch eine der Schreibweisen ausgedrückt:

- $y = f(x)$
- $x \mapsto y$

Dabei wird x *das Argument* oder die *Stelle* und y *der (Funktions-)Wert* genannt.

Beispiel 1.1

Darstellung einer Funktion durch ein *Pfeildiagramm*:



$f($♥$) = $ ⚡ (♥ $\mapsto$ ⚡)

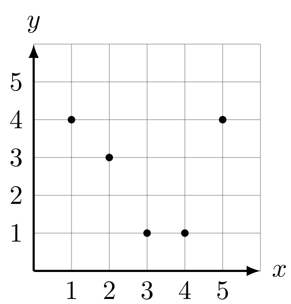
$f($✚$) = $ ✚ (✚ $\mapsto$ ✚)

usw.

Beispiel 1.2

Darstellung einer Funktion durch einen *Graphen*:

$D = W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



$f(1) = 4$

$f(2) = 3$

usw.

Beispiel 1.3

Darstellung einer Funktion durch eine *Wertetabelle*:

$D = W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

x	1	2	3	4	5	6
y	4	3	1	1	4	5

$f(1) = 4 \quad (1 \mapsto 4)$

$f(2) = 3 \quad (2 \mapsto 3)$

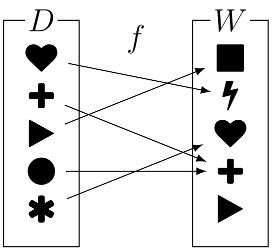
Urbilder

Ist $f\colon D \to W$ und $y \in W$ so ist

$$f^{-1}(y) = \{x \in D\colon f(x) = y\}$$

das Urbild von y unter f.

Beispiel 1.4



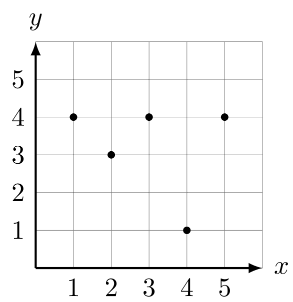
$f^{-1}(■) = \{▶\}$

$f^{-1}(✚) = \{✚, ●\}$

$f^{-1}(▶) = \{\,\}$

Beispiel 1.5

$D = W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



$f^{-1}(3) = \{2\}$

$f^{-1}(2) = \{\,\}$

$f^{-1}(4) = \{1, 3, 5\}$

Beispiel 1.6

$D = W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

x	1	2	3	4	5	6
y	4	5	4	1	1	2

$f^{-1}(4) = \{1, 3\}$

$f^{-1}(3) = \{\ \}$

$f^{-1}(5) = \{2\}$

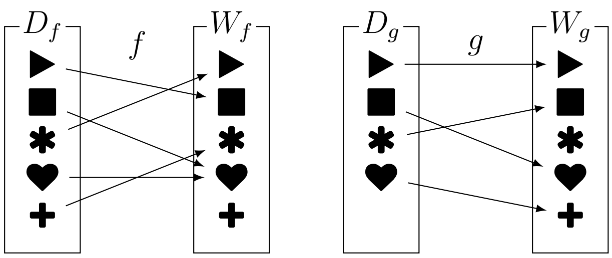
Verketten von Funktionen

Sind $f\colon D_f \to W_f$ und $g\colon D_g \to W_g$ Funktionen mit $W_f \subset D_g$, so können die Funktionen *verkettet* („aneinandergehängt“) werden.

$$\begin{tikzcd} D_f \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & W_f \subset D_g \arrow[r, "g"] & W_g \end{tikzcd}$$

Beachte: Die zuerst ausgeführte Funktion (hier f) steht rechts. Die Beispiele zeigen, warum dies sinnvoll ist.

Beispiel 1.7



$(g \circ f)(\blacktriangleright) = g(f(\blacktriangleright)) = g(\blacksquare) = \heartsuit$

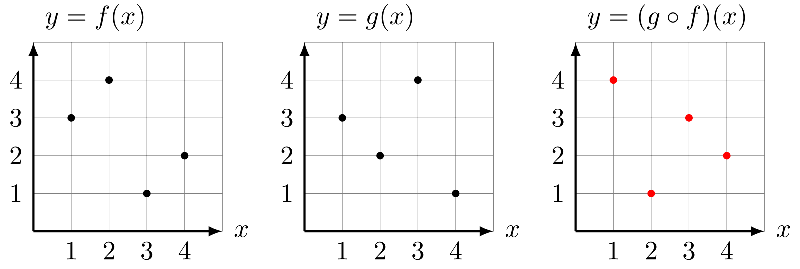
$(g \circ f)(\ast) = g(f(\ast)) = g(\blacktriangleright) = \blacktriangleright$

$(f \circ g)(\blacktriangleright) = f(g(\blacktriangleright)) = f(\blacktriangleright) = \blacksquare$

$(f \circ g)(\ast) = f(g(\ast)) = f(\blacksquare) = \heartsuit$

Beispiel 1.8

$D = W = \{1, 2, 3, 4\}$



Beispiel 1.9

$D = W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	3	1	2	4

x	1	2	3	4	5
$g(x)$	2	1	5	3	4

$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3) = 5$

$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(1) = 4$

$f^2(3) \overset{\text{Def.}}{=} (f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(1) = 4$

$g^3(1) = (g \circ g \circ g)(1) = g(g(g(1))) = g(g(2)) = g(1) = 2$

$g^6(1) = g(g(g(g(g(g(1)))))) = g(g(g(g(g(2))))) = \ldots = 1$

Die Umkehrfunktion

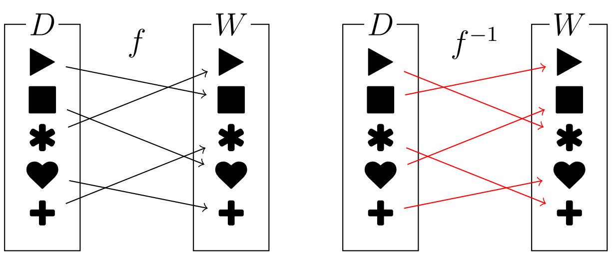
Wenn das Urbild zu jedem $y \in W$ genau ein Element hat, dann ist auch die Zuordnung

$$f^{-1}\colon y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

eine Funktion und wird *Umkehrfunktion* von f genannt.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] & W \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Beispiel 1.10



Offenbar gilt: $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ und $(f \circ f^{-1})(y) = y$

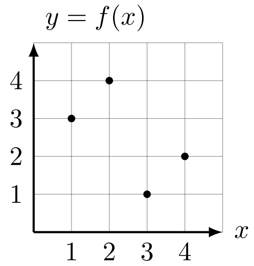
Beispiel 1.11

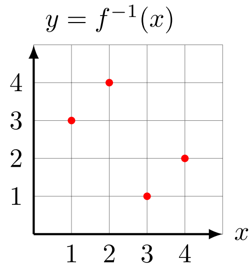
$D = W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	4	5	2	6	1	3

x	1	2	3	4	5	6
$f^{-1}(x)$	5	3	6	1	2	4

Beispiel 1.12





Eine Funktion, die gleich ihrer Umkehrfunktion ist, heisst *Involution*.

($\rightarrow$ Achsen- und Punktspiegelungen)

2 Funktionsgleichungen

Bestehen Definitions- und Wertebereich einer Funktion f aus Zahlen und gibt es eine Formel, mit der sich die abhängige Variable $y \in W$ aus der unabhängigen Variable $x \in D$ *berechnen* lässt, so sagt man, die Funktion sei durch die *Funktionsgleichung* $y = f(x)$ bzw. den *Funktionsterm* $f(x)$ definiert.

Eine Funktion f an der Stelle x_0 *auswerten* bedeutet, dass man überall im Funktionsterm die Variable x durch die Zahl x_0 ersetzt und anschliessend diesen Ausdruck berechnet.

Beispiel 2.1

Werte die Funktion $f\colon y = x^2 - 6x + 10$ an den Stellen $x = 1,\ 4,\ 0$ und -2 aus.

$f(1) = 1^2 - 6 \cdot 1 + 10 = 5$

$f(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 10 = 2$

$f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 10 = 10$

$f(-2) = (-2)^2 - 6 \cdot (-2) + 10 = 26$

Beispiel 2.2

Werte die Funktion $f\colon y = \dfrac{x-1}{x-2}$ an den Stellen $x = 0,\ 1,\ 2$ und $\frac{1}{2}$ aus.

$$f(0) = \frac{0-1}{0-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{1-1}{1-2} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$f(2) = \frac{1-2}{2-2} = \frac{-1}{0} \quad \text{nicht definiert}$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}-2} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Beispiel 2.3

Werte die Funktion $f\colon y = \sqrt{x+1}$ an den Stellen $x = 0,\ 1,\ -1$ und -2 aus.

$f(0) = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$

$f(1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$f(-1) = \sqrt{-1+1} = \sqrt{0} = 0$

$f(-2) = \sqrt{-2+1} = \sqrt{-1}$ nicht definiert

Beispiel 2.4

Gegeben: $f\colon y = 2x - 3$ und $g\colon y = x^2$
Werte $f \circ g$ und $g \circ f$ an den Stellen $x = 2$, und $x = a$ aus.

$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(2 \cdot 2 - 3) = g(1) = 1^2 = 1$

$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(2^2) = f(4) = 2 \cdot 4 - 3 = 5$

$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(2a - 3) = (2a - 3)^2 = 4a^2 - 12a + 9$

$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(a^2) = 2a^2 - 3$

Die Bestimmung der Umkehrfunktion

Gegeben: $f\colon y = f(x)$

Gesucht: $f^{-1}\colon y = f^{-1}(x)$ mit $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

Rezept:

1. Löse $y = f(x)$ nach x auf.
2. Vertausche x und y.

Beispiel 2.5

Bestimme die Umkehrfunktion f^{-1} von $f\colon y = 2x + 4$.

1. Löse $y = f(x)$ nach x auf:

$$
\begin{aligned}
y &= 2x + 4 \\
y - 4 &= 2x \\
x &= \frac{y-4}{2} = \frac{1}{2}y - 2
\end{aligned}
$$

2. Vertausche x und y:

$$f^{-1}\colon y = \frac{1}{2}x - 2$$

Test für $x = 5$: $\big(f^{-1} \circ f\big)(5) = f^{-1}\big(f(5)\big) = f^{-1}\big(14\big) = 5$

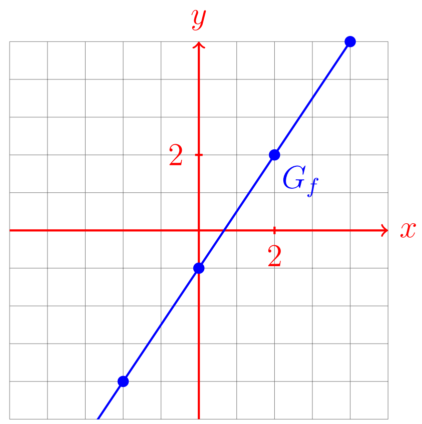
3 Graphen von Funktionsgleichungen

Skizzieren von Funktionsgraphen

Ist eine Funktion f durch ihre Funktionsgleichung $y = f(x)$ gegeben, und ist der Definitionsbereich D ein Intervall $I = [a, b]$ mit unendlich vielen Stellen, so müssen wir uns damit begnügen, die Funktion an einigen Stellen dieses Intervalls auszuwerten, dort zu skizzieren und den Rest des Graphen durch *Interpolation* zu erraten.

Beispiel 3.1

Skizziere den Graphen der Funktion $f\colon y = 1.5x - 1$ für $D = [-5, 5]$ und $W = [-5, 5]$.

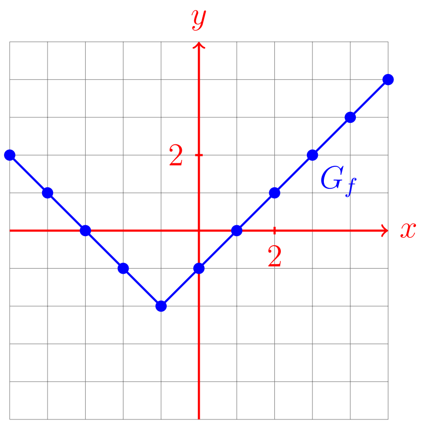


Hat die Gleichung einer Funktion f die Form $y = ax + b$, wobei a und b zwei beliebige reelle Zahlen sind, so ist ihr Graph eine Gerade.

In diesem Fall genügt es, die Funktion an zwei weit auseinander liegenden Stellen x_1 und x_2 auszuwerten und die entsprechenden Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zu verbinden.

Beispiel 3.2

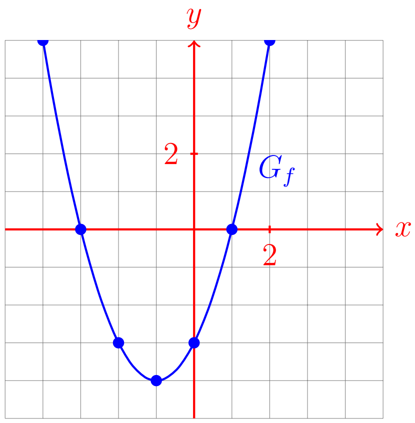
Skizziere den Graphen der Funktion $f\colon y = |x + 1| - 2$ für $D = [-5, 5]$ und $W = [-5, 5]$.



Enthält eine Funktionsgleichung Betragszeichen, so befindet sich an der Stelle, für die der Betrag den Wert 0 hat, in der Regel ein „Knick".

Beispiel 3.3

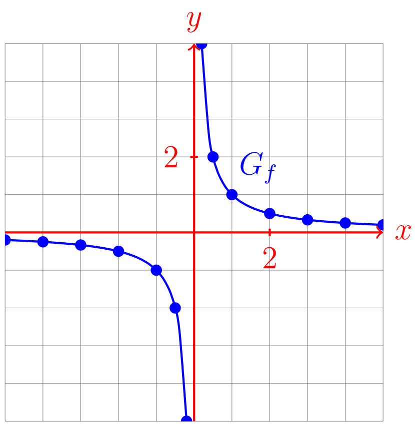
Skizziere den Graphen der Funktion $f\colon y = x^2 + 2x - 3$ für $D = [-5, 5]$ und $W = [-5, 5]$.



Hat die Gleichung einer Funktion f die Form $y = ax^2 + bx + c$, wobei $a \neq 0$, b und c (fast) beliebige reelle Zahlen sind, so hat ihr Graph eine spezielle U-förmige Gestalt, die *Parabel* genannt wird.

Beispiel 3.4

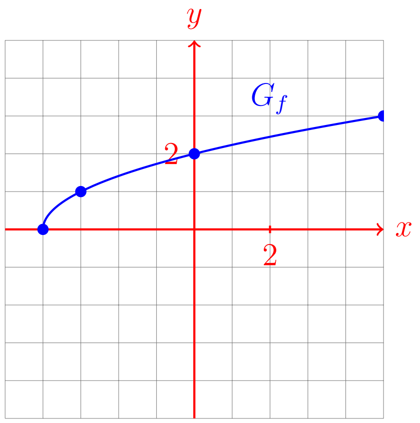
Skizziere den Graphen der Funktion $f\colon y = \frac{1}{x}$ für $D = [-5, 5]$ und $W = [-5, 5]$.



Kommt bei der Gleichung einer Funktion f die Variable im Nenner vor, so gibt es an den Stellen, wo der Nenner null wird, sogenannte *Definitionslücken*. Durch sie wird der Graph „zerschnitten“. Ein solcher Graph wird *Hyperbel* und die Teile *Hyperbeläste* genannt.

Beispiel 3.5

Skizziere den Graphen der Funktion $f\colon y = \sqrt{x+4}$ für $D = [-5, 5]$ und $W = [-5, 5]$.



Kommt bei der Gleichung einer Funktion f die Variable x im Radikanden vor, so ist der Graph eine „halbe liegende“ Parabel.

Der Ordinatenabschnitt einer Funktion

Ist f eine Funktion, so wird der Wert $y_0 = f(0)$, sofern er existiert, *Ordinatenabschnitt* oder *y-Achsenabschnitt* der Funktion genannt.

geometrische Deutung: Ist y_0 der Ordinatenabschnitt der Funktion f, so ist $(0, y_0)$ der Schnittpunkt des Graphen G_f mit der y-Achse (Ordinate).

Merke: Den Ordinatenabschnitt erhält man durch Einsetzen von $x = 0$ in die Funktionsgleichung $y = f(x)$.

Nullstellen einer Funktion

Ist f eine Funktion, so werden die Lösungen der Gleichung $0 = f(x)$, sofern es solche gibt, *Nullstellen* der Funktion f genannt.

geometrische Deutung: Ist x_0 eine Nullstelle der Funktion f, so ist der Punkt $(x_0, 0)$ ein Schnittpunkt des Graphen G_f mit der x-Achse (Abszisse).

Merke: Nullstellen erhält man durch Einsetzen von $y = 0$ in die Funktionsgleichung $y = f(x)$ und anschliessendem Auflösen nach x.

Beispiel 3.6

Beispiel	Ordinatenabschnitt	Nullstellen
3.1	-1	$\frac{2}{3}$
3.2	-1	-3, 1
3.3	-3	-3, 1
3.4	keine	keine
3.5	2	-4

Beispiel 3.7

Berechne den Ordinatenabschnitt und die Nullstellen der Funktion $f\colon y = x + 1 - 2\sqrt{x}$.

Ordinatenabschnitt: $f(0) = 0 + 1 - 2\sqrt{0} = 1$

Nullstelle(n):
$$\begin{aligned} 0 &= f(x) \\ 0 &= x + 1 - 2\sqrt{x} \\ 2\sqrt{x} &= x + 1 \\ 4x &= x^2 + 2x + 1 \\ 0 &= x^2 - 2x + 1 \\ 0 &= (x-1)^2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Punkte testen

Ein Punkt $P(x, y)$ liegt genau dann auf dem Graphen G_f der Funktion f, wenn die Koordinaten von P die Funktionsgleichung $y = f(x)$ erfüllen.

Beispiel 3.8

Untersuche, ob die Punkte $A(2, -3)$ und $B(3, 4)$ auf dem Graphen der Funktion mit der Gleichung $y = x^2 + x - 9$ liegen.

$-3 = 2^2 + 2 - 9$

$-3 = -3 \quad \Rightarrow \quad A \in G_f$

$4 = 3^2 + 3 - 9$

$4 = 3 \quad \Rightarrow \quad B \notin G_f$

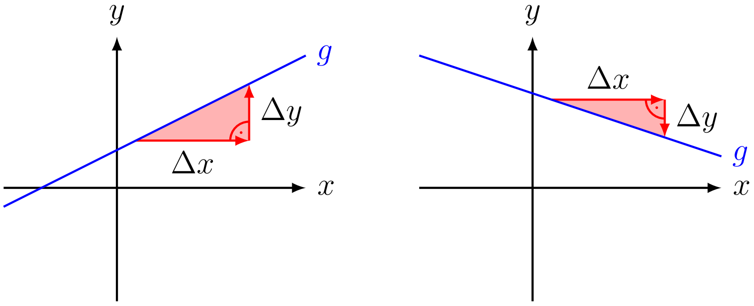
4 Affine Funktionen

Eine Funktion f mit einer Funktionsgleichung der Form $y = ax + b$, wobei $a \neq 0$ und b reelle Zahlen sind, wird *linear-affine Funktion* genannt.

Gilt ferner $b = 0$, so handelt es sich um eine *lineare Funktion*.

Die Steigung einer Geraden

Ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse auf einer Geraden g und dessen Katheten parallel zu den Koordinatenachsen liegen, wird *Steigungsdreieck* von g genannt.



Es spielt keine Rolle, ob die Steigungsdreiecke auf der Geraden „liegen“ oder an ihr „hängen“. Wichtig ist nur, dass der Anfangspunkt des zweiten Pfeils an der Spitze des ersten beginnt.

Mit einem Steigungsdreieck können wir die Steigung m einer Geraden definieren:

$$m = \frac{\text{Vertikalunterschied}}{\text{Horizontalunterschied}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl des Steigungsdreicks. Warum? Ähnlichkeit

Ist $f\colon y = ax + b$ eine linear-affine Funktion und sind $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ zwei beliebige Punkte auf dem Graphen G_f, so beträgt die Steigung zwischen diesen Punkten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Das bedeutet, dass die Steigung zwischen zwei beliebigen Punkten des Graphen immer gleich gross ist, weshalb G_f eine *Gerade* sein muss. Der Koeffizient a drückt die Stärke der Steigung (oder des Gefälles) aus.

Zusammenfassung

Der Graph einer linear-affinen Funktion $f\colon y = ax + b$ ist eine Gerade …

- mit der Steigung $m = a$ und
- dem Ordinatenabschnitt $f(0) = b$.

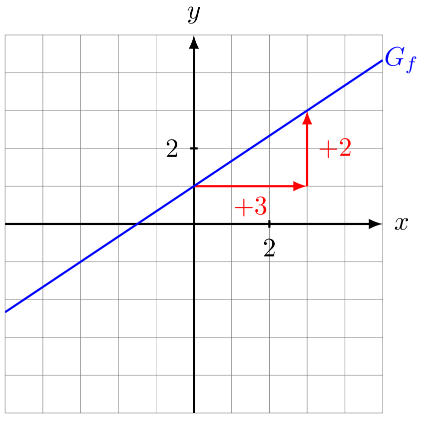
Beispiel 4.1

$f\colon y = \frac{2}{3}x + 1 = mx + q$

Ordinatenabschnitt: $q = 1$

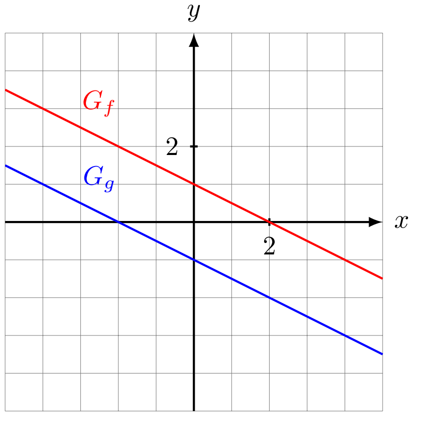
Steigung: $m = \frac{2}{3} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Nullstelle: $0 = \frac{2}{3}x + 1 \quad \Rightarrow \quad 0 = 2x + 3 \quad \Rightarrow \quad x = -1.5$



Beispiel 4.2

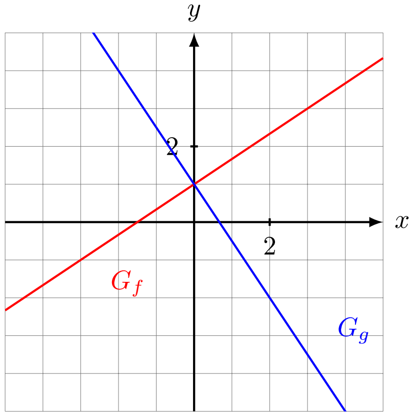
Skizziere die Graphen der Funktionen $f\colon y = -\frac{1}{2}x+1$ und $g\colon y = -\frac{1}{2}x-1$ ins vorbereitete Koordinatensystem



Die Graphen linear-affiner Funktionen mit gleicher Steigung sind parallele Geraden.

Beispiel 4.3

Skizziere die Graphen der Funktionen $f\colon y = \frac{2}{3}x + 1$ und $g\colon y = -\frac{3}{2}x + 1$ ins vorbereitete Koordinatensystem.

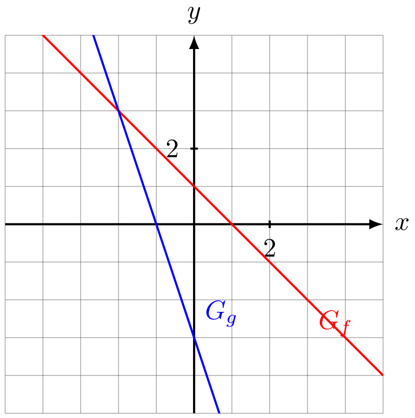


Hat das Produkt der Steigungen zweier linear-affiner Funktionen den Wert -1, so sind die zugehörigen Graphen senkrecht.

Beispiel 4.4

Gegeben: Funktionen $f\colon y = -x + 1$ und $g\colon y = -3x - 3$

Berechne den Schnittpunkt der Graphen G_f und G_g und prüfe das Ergebnis anhand der graphischen Darstellung.



$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ -x + 1 &= -3x - 3 \\ 2x &= -4 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$y = f(-2) = -(-2) + 1 = 3$

$y = g(-2) = -3(-2) - 3 = 6 - 3 = 3$ (keine Überraschung!)

Schnittpunkt: $S(-2, 3)$