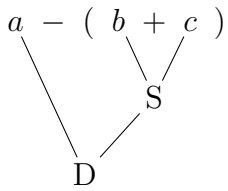
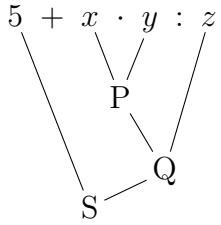
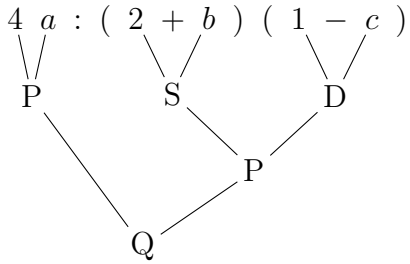
Aufgabe 1.1



Aufgabe 1.2



Aufgabe 1.3



Aufgabe 1.4

$7p(2q - 4r + 3s) = 14pq - 28pr + 21sp$

Aufgabe 1.5

$(2c + 3d)^2 = 4c^2 + 12cd + 9d^2$

Aufgabe 1.6

$(u - 3)(u + 5) = u^2 + 2u - 15$

Aufgabe 1.7

$(4a - 2b)(3x - y) = 12ax - 4ay - 6bx + 2by$

Aufgabe 1.8

$$(x+y-z)(x+y+z) = ((x+y)-z)((x+y)+z)$$
$$\stackrel{*}{=} (x+y)^2 - z^2 = x^2 + 2xy + y^2 - z^2$$

* 3. binomische Formel

Aufgabe 1.9

$$(v+w)(v-w)(v^2-w^2) \stackrel{*}{=} (v^2-w^2)(v^2-w^2) \stackrel{**}{=} v^4 - 2v^2w^2 + w^4$$

* 3. binomische Formel

** 2. binomische Formel

Aufgabe 1.10

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

d	da	db	dc	d^2
c	ca	cb	c^2	cd
b	ba	b^2	bc	bd
a	a^2	ab	ac	ad
	a	b	c	d

Aufgabe 1.11

$$x^2y^2 - xy = xy(xy-1)$$

Aufgabe 1.12

$$au + av + bu + bv = a(u+v) + b(u+v) = (u+v)(a+b)$$

Aufgabe 1.13

$$y^2 - y - 30 = (y+5)(y-6)$$

Aufgabe 1.14

$$cr^2 - c - dr^2 + d = c(r^2-1) - d(r^2-1) = (r^2-1)(c-d)$$
$$= (r-1)(r+1)(c-d)$$

Aufgabe 1.15

$$-4t^2 - 4t + 48 = -4(t^2 + t - 12) = -4(t-3)(t+4)$$

Aufgabe 1.16

$$\begin{aligned} p^3 + p^2 - p - 1 &= p^2(p+1) - (p+1) = (p^2-1)(p+1) \\ &= (p-1)(p+1)(p+1) = (p-1)(p+1)^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 1.17

$$\begin{aligned} 27ef - 18eg + 9f^2 - 12fg + 4g^2 &= 9e(3f-2g) + (3f-2g)^2 \\ &= (3f-2g)(9e + (3f-2g)) \\ &= (3f-2g)(9e+3f-2g) \end{aligned}$$

Aufgabe 1.18

$$\begin{aligned} x^2 - 5yz + z^3 &= (-1)\big(x^2 : (-1) - 5yz : (-1) + z^2 : (-1)\big) \\ &= -(-x^2 + 5yz - z^2) = -(5yz - x^2 - z^3) \end{aligned}$$

Die letzten beiden Terme werden als Lösung akzeptiert. Mit der Vertauschung der Summanden lässt sich jedoch das führende Minuszeichen in der Klammer vermeiden.

Aufgabe 1.19

$$\begin{aligned} 4a + \frac{1}{3}b - \frac{3}{4}c &= \frac{2}{5}\left(4a : \frac{2}{5} + \frac{1}{3}b : \frac{2}{5} - \frac{3}{4}c : \frac{2}{5}\right) \\ &= \frac{2}{5}\left(10a + \frac{5}{6}b - \frac{15}{8}c\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 1.20

$$x^2b + yc^3 = cx^2\left(\frac{x^2b}{cx^2} + \frac{yc^3}{cx^2}\right) = cx^2\left(\frac{b}{c} + \frac{yc^2}{x^2}\right)$$

Aufgabe 2.1

$$\begin{array}{rl} & (\,2x^3 - 5x^2 - 13x + 4\,) : (\,x - 4\,) = 2x^2 + 3x - 1 \\ -\,\underline{(\,2x^2 - 8x^2\;)} & \\ & \quad 3x^2 - 13x \\ \quad -\;\underline{(\;3x^2 - 12x\;)} & \\ & \qquad -\;\;x\;\;-4 \\ \quad -\;\underline{(\;\;-\;\;x\;\;-4\,)} & \\ & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Aufgabe 2.2

$$
\begin{array}{l}
(\,6x^3-7x^2+0x+8\,):(\,3x+1\,)=2x^2-3x+1+\dfrac{7}{3x+1}\\
\underline{-\,(\,6x^3+2x^2\,)}\\
\quad -9x^2+0x\\
\quad \underline{-\,(\,-9x^2-3x\,)}\\
\qquad\qquad 3x+8\\
\qquad \underline{-\,(\,3x+1\,)}\\
\qquad\qquad\quad 7
\end{array}
$$

Aufgabe 3.1

$18a^2bc^3$	$=$	2			3	3	a	a	b			c	c	c					
$8ab^4$	$=$	2	2	2			a		b	b	b	b							
ggT	:	2					a		b						$=$	$2ab$			
kgV	:	2	2	2	3	3	a	a	b	b	b	b	c	c	c	$=$	$72a^2b^4c^3$		

Aufgabe 3.2

a	$=$	a						
$a+b$	$=$		$(a+b)$					
ggT	:				$=$	1		
kgV	:	a	$(a+b)$		$=$	$a(a+b)$		

Aufgabe 3.3

x^2-y^2	$=$		$(x-y)$	$(x+y)$					
$2x-2y$	$=$	2	$(x-y)$						
ggT	:		$(x-y)$				$=$	$x-y$	
kgV	:	2	$(x-y)$	$(x+y)$			$=$	$2(x-y)(x+y)$	

Aufgabe 3.4

d^2-9	$=$	$(d-3)$	$(d+3)$					
$d-3$	$=$	$(d-3)$						
$d^2-9d+18$	$=$	$(d-3)$		$(d-6)$				
ggT	:	$(d-3)$					$=$	$(d-3)$
kgV	:	$(d-3)$	$(d+3)$	$(d-6)$			$=$	$(d-3)(d+3)(d-6)$

Aufgabe 4.1

$$\frac{6f^4g^3h^5}{2f^3gh^2}=3fg^2h^3$$

Aufgabe 4.2

$$\frac{2m}{4mn-2m} = \frac{2m}{2m(2n-1)} = \frac{1}{2n-1}$$

Aufgabe 4.3

$$\frac{p^3-p^2}{p^3+p^2} = \frac{p^2(p-1)}{p^2(p+1)} = \frac{p-1}{p+1}$$

Aufgabe 4.4

$$\begin{aligned}\frac{as+at+bs+bt}{2s+2t} &= \frac{a(s+t)+b(s+t)}{2(s+t)} = \frac{(a+b)(s+t)}{2(s+t)} \\ &= \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

Aufgabe 4.5

$$\begin{aligned}\frac{yz^2+2yz-8y}{yz-2y+5z-10} &= \frac{y(z^2+2z-8)}{y(z-2)+5(z-2)} \\ &= \frac{y(z-2)(z+4)}{(z-2)(y+5)} = \frac{y(z+4)}{y+5}\end{aligned}$$

Aufgabe 4.6

$$\begin{aligned}\frac{25u^2-9(v-1)^2}{6v-10u-6} &= \frac{[5u-3(v-1)]\cdot[5u+3(v-1)]}{6v-10u-6} \\ &= \frac{(5u-2v+3)(5u+3v-3)}{-2(5u-3v+3)} \\ &= \frac{5u+3v-3}{-2} = \frac{3-5u-3v}{2}\end{aligned}$$

Aufgabe 4.7

$$\left(\frac{r^2}{9s^2u}, \frac{1}{r^2u^2}, \frac{8u}{15rs}\right) = \left(\frac{5r^4u}{45r^2s^2u^2}, \frac{45s^2}{45r^2s^2u^2}, \frac{24rsu^3}{45r^2s^2u^2}\right)$$

Aufgabe 4.8

$$\left(\frac{1}{t^2-t}, \frac{t-1}{t}\right) = \left(\frac{1}{t(t-1)}, \frac{(t-1)^2}{t(t-1)}\right)$$

Aufgabe 4.9

$$\left(\frac{n}{n-5}, \frac{5}{5-n}\right) = \left(\frac{n}{n-5}, \frac{-5}{n-5}\right)$$

Aufgabe 4.10

$$\left(\frac{1}{6x^2y},\ \frac{5}{8xy^2}\right) = \left(\frac{1\cdot 4y}{6x^2y\cdot 4y},\ \frac{5\cdot 3x}{8xy^2\cdot 3x}\right)$$
$$= \left(\frac{4y}{24x^2y^2},\ \frac{15x}{24x^2y^2}\right)$$

Aufgabe 4.11

$$\left(\frac{2}{x},\ \frac{3}{y},\ \frac{5}{z}\right) = \left(\frac{2yz}{xyz},\ \frac{3xz}{xyz},\ \frac{5xy}{xyz}\right)$$

Aufgabe 5.1

$$\frac{5}{3n} + \frac{2}{3n} - \frac{4}{3n} = \frac{5+2-4}{3n} = \frac{3}{3n} = \frac{1}{n}$$

Aufgabe 5.2

$$\frac{1}{m+1} + \frac{m}{1+m} = \frac{1}{1+m} + \frac{m}{1+m} = \frac{1+m}{1+m} = 1$$

Aufgabe 5.3

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3} = \frac{r}{r^3} - \frac{1}{r^3} = \frac{r-1}{r^3}$$

Aufgabe 5.4

$$d - \frac{nd-2}{n} = \frac{nd}{n} - \frac{nd-2}{n} = \frac{nd-(nd-2)}{n} = \frac{nd-nd+2}{n} = \frac{2}{n}$$

Aufgabe 5.5

$$e - \frac{e^2-2}{e-2} = \frac{e(e-2)}{e-2} - \frac{e^2-2}{e-2} = \frac{e(e-2)-(e^2-2)}{e-2}$$
$$= \frac{e^2-2e-e^2+2}{e-2} = \frac{2-2e}{e-2}$$

Aufgabe 5.6

$$\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x+y)(x+y)}{(x-y)(x+y)} - \frac{(x-y)(x-y)}{(x+y)(x-y)}$$
$$= \frac{x^2+2xy+y^2-(x^2-2xy+y^2)}{(x+y)(x-y)}$$
$$= \frac{4xy}{(x+y)(x-y)}$$

Aufgabe 5.7

$$\frac{c}{c-d} - \frac{2cd}{c^2-d^2} - \frac{d}{c+d}$$
$$= \frac{c(c+d)}{(c-d)(c+d)} - \frac{2cd}{(c-d)(c+d)} - \frac{d(c-d)}{(c-d)(c+d)}$$
$$= \frac{c^2+cd-2cd-(cd-d^2)}{(c-d)(c+d)}$$
$$= \frac{c^2-2cd+d^2}{(c-d)(c+d)} = \frac{(c-d)^2}{(c-d)(c+d)} = \frac{c-d}{c+d}$$

Aufgabe 5.8

$$\frac{c}{c^2-8c+16} + \frac{2}{c^2-6c+8}$$
$$= \frac{c}{(c-4)(c-4)} + \frac{2}{(c-2)(c-4)}$$
$$= \frac{c(c-2)}{(c-4)(c-4)(c-2)} + \frac{2(c-4)}{(c-2)(c-4)(c-4)}$$
$$= \frac{(c^2-2c)+(2c-8)}{(c-4)(c-4)(c-2)} = \frac{c^2-8}{(c-4)(c-4)(c-2)}$$

Aufgabe 5.9

$$\frac{7}{e-1} + \frac{6}{1-e} = \frac{7}{e-1} + \frac{-6}{e-1} = \frac{7+(-6)}{e-1} = \frac{1}{e-1}$$

Aufgabe 5.10

$$\frac{5}{4x-8y} + \frac{3}{5x-10y} - \frac{11}{6x-12y}$$
$$= \frac{5}{4(x-2y)} + \frac{3}{5(x-2y)} - \frac{11}{6(x-2y)}$$
$$= \frac{75}{60(x-2y)} + \frac{36}{60(x-2y)} - \frac{110}{60(x-2y)}$$
$$= \frac{75+36-110}{60(x-2y)} = \frac{1}{60(x-2y)}$$

Aufgabe 5.11

$$\frac{2x-1}{x-3} - \frac{2x(x+2)}{x^2-9} - \frac{2}{3x} = \frac{2x-1}{x-3} - \frac{2x(x+2)}{(x+3)(x-3)} - \frac{2}{3x}$$

$$= \frac{3x(2x-1)(x+3)}{3x(x-3)(x+3)} - \frac{3x \cdot 2x(x+2)}{3x(x+3)(x-3)} - \frac{2(x+3)(x-3)}{3x(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{3x(2x^2+5x-3) - 6x^2(x+2) - 2(x^2-9)}{3x(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{6x^3+15x^2-9x-6x^3-12x^2-2x^2+18}{3x(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{x^2-9x+18}{3x(x+3)(x-3)} = \frac{(x-3)(x-6)}{3x(x+3)(x-3)} = \frac{x-6}{3x(x+3)}$$

Aufgabe 6.1

$$ac^2 \cdot \frac{b}{cd} = \frac{ac^2 \cdot b}{cd} = \frac{abc}{d}$$

Aufgabe 6.2

$$(2x+2y) \cdot \frac{5a}{x+y} = \frac{2(x+y) \cdot 5a}{x+y} = 10a$$

Aufgabe 6.3

$$\frac{-14x^2y^3}{15uv} \cdot \frac{20u^2}{-21xy^4} = \frac{14x^2y^3 \cdot 20u^2}{15uv \cdot 21xy^4} = \frac{2x^2y^3 \cdot 4u^2}{3uv \cdot 3xy^4} = \frac{8ux}{9vy}$$

Aufgabe 6.4

$$\frac{d-1}{2d} \cdot \frac{d^2}{1-d} = \frac{-(1-d)d^2}{2d(1-d)} = \frac{-d}{2}$$

Aufgabe 6.5

$$\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)(a-b) = \frac{a+b}{ab} \cdot (a-b) = \frac{(a+b)(a-b)}{ab} = \frac{a^2-b^2}{ab}$$

Aufgabe 6.6

$$\frac{x^2-x-12}{x^2-6x+8} \cdot \frac{x^2-4x+4}{x^2-9} = \frac{(x-4)(x+3)}{(x-2)(x-4)} \cdot \frac{(x-2)^2}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{x-2}{x-3}$$

Aufgabe 6.7

$$\left(\frac{a}{d}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right) = \frac{ac+ad}{cd}\cdot\frac{bc+ac}{ab}$$
$$= \frac{a(c+d)}{cd}\cdot\frac{c(a+b)}{ab} = \frac{(a+b)(c+d)}{bd}$$

Aufgabe 6.8

$$5x : \frac{35x^2}{4y} = 5x\cdot\frac{4y}{35x^2} = \frac{4y}{7x}$$

Aufgabe 6.9

$$\frac{s^4-9}{s+3} : (3-s^2) = \frac{(s^2-3)(s^2+3)}{s+3}\cdot\frac{1}{3-s^2}$$
$$= \frac{-(3-s^2)(s^2+3)}{(s+3)(3-s^2)} = \frac{-(s^2+3)}{s+3}$$

Aufgabe 6.10

$$\frac{x^2-3x-10}{x^2-2x-8} : \frac{x^2-25}{x^2+2x-24} = \frac{(x+2)(x-5)}{(x+2)(x-4)} : \frac{(x-5)(x+5)}{(x+6)(x-4)}$$
$$= \frac{x-5}{x-4}\cdot\frac{(x+6)(x-4)}{(x-5)(x+5)}$$
$$= \frac{x+6}{x+5}$$

Aufgabe 6.11

$$\left(\frac{3x-8y}{4}+\frac{4y^2-9z^2}{3x}\right) : \left(\frac{3x-4y}{2x}+\frac{3z}{x}\right)$$
$$= \frac{3x(3x-8y)+4(4y^2-9z^2)}{12x} : \frac{3x-4y+6z}{2x}$$
$$= \frac{9x^2-24x+16y^2-36z^2}{12x}\cdot\frac{2x}{3x-4y+6z}$$
$$= \frac{(3x-4y)^2-36z^2}{6}\cdot\frac{1}{3x-4y+6z}$$
$$= \frac{(3x-4y-6z)(3x-4y+6z)}{6}\cdot\frac{1}{3x-4y+6z}$$
$$= \frac{3x-4y-6z}{6}$$

Aufgabe 7.1

$$\left(\frac{m-n}{m+n}+1\right)^2 = \left(\frac{m-n}{m+n}+\frac{m+n}{m+n}\right)^2 = \left(\frac{m-n+(m+n)}{m+n}\right)^2$$
$$= \left(\frac{2m}{m+n}\right)^2 = \frac{4m^2}{(m+n)^2}$$

Aufgabe 7.2

$$\left(\frac{r^3-1}{r^3}-\frac{r^2-r-1}{r^2}-\frac{1}{r}\right):\frac{1}{r^3}$$
$$= \frac{r^3-1-r(r^2-r-1)-r^2}{r^3}\cdot\frac{r^3}{1}$$
$$= \frac{r^3-1-r^3+r^2+r-r^2}{r^3}\cdot\frac{r^3}{1}$$
$$= \frac{r-1}{r^3}\cdot\frac{r^3}{1} = r-1$$

Aufgabe 7.3

$$\left(\frac{2n+1}{2n-1}-\frac{2n-1}{2n+1}\right)\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{8n}\right)$$
$$= \left(\frac{(2n+1)(2n+1)}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{(2n-1)(2n-1)}{(2n+1)(2n-1)}\right)\left(\frac{4n^2}{8n}-\frac{4n}{8n}+\frac{1}{8n}\right)$$
$$= \frac{4n^2+4n+1-(4n^2-4n+1)}{(2n+1)(2n-1)}\cdot\frac{4n^2-4n+1}{8n}$$
$$= \frac{8n}{(2n+1)(2n-1)}\cdot\frac{(2n-1)^2}{8n} = \frac{2n-1}{2n+1}$$

Aufgabe 8.1

$$\frac{\frac{54k^2}{65t}}{\frac{81k}{75t^2}} = \frac{54k^2}{65t}:\frac{81k}{75t^2} = \frac{54k^2}{65t}\cdot\frac{75t^2}{81k} = \frac{10kt}{13}$$

Aufgabe 8.2

$$\frac{2e-6f}{\frac{3e^2-9ef}{2f}} = 2(e-3f):\frac{3e(e-3f)}{2f}$$
$$= \frac{2(e-3f)}{1}\cdot\frac{2f}{3e(e-3f)} = \frac{4f}{3e}$$

Aufgabe 8.3

$$\frac{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}}{\frac{1}{d}-\frac{1}{b}} = \left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right) : \left(\frac{1}{d}-\frac{1}{b}\right) = \frac{ad-cb}{bd} : \frac{b-d}{bd}$$

$$= \frac{ad-cb}{bd} \cdot \frac{bd}{b-d} = \frac{ad-bc}{b-d}$$

Aufgabe 9.1

$$\frac{3}{x}-\frac{1}{2x} = 4 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad || \cdot 2x$$

$$6-1 = 8x$$

$$5 = 8x$$

$$x = \tfrac{5}{8} \quad L = \left\{\tfrac{5}{8}\right\}$$

Aufgabe 9.2

$$\frac{x-6}{x} = \frac{x}{x+10} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0,\, -10\} \quad || \cdot x(x+10)$$

$$(x+10)(x-6) = x^2$$

$$x^2+4x-60 = x^2$$

$$4x-60 = 0$$

$$4x = 60$$

$$x = 15 \quad L = \{15\}$$

Aufgabe 9.3

$$\frac{x}{x-3} = \frac{x+1}{9-3x} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$\frac{x}{x-3} = \frac{x+1}{-3(3-x)} \quad \text{(Bruch rechts mit } -1 \text{ erweitern)}$$

$$\frac{x}{x-3} = \frac{-(x+1)}{3(3-x)} \quad || \cdot 3(x-3)$$

$$3x = -(x+1)$$

$$3x = -x-1$$

$$4x = -1$$

$$x = -\tfrac{1}{4} \quad L = \{-\tfrac{1}{4}\}$$

Aufgabe 9.4

$$\frac{x+3}{x-2} - \frac{x+2}{x-3} = \frac{x-5}{x^2-5x+6} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{2,3\}$$
$$\frac{x+3}{x-2} - \frac{x+2}{x-3} = \frac{x-5}{(x-2)(x-3)} \quad || \cdot (x-2)(x-3)$$
$$(x+3)(x-3) - (x+2)(x-2) = x-5$$
$$x^2 - 9 - (x^2 - 4) = x - 5$$
$$-5 = x - 5$$
$$0 = x \quad L = \{0\}$$

Aufgabe 9.5

$$\frac{8}{x+2} = \frac{8}{9} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$
$$x + 2 = 9$$
$$x = 7 \qquad L = \{7\}$$

Aufgabe 9.6

$$\left(3 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(0 - \frac{1}{n}\right) = 0$$
$$\underbrace{\left(\frac{3}{1} - \frac{3}{3n}\right)}_{1=3n}\underbrace{\left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2n}\right)}_{1=2n}\underbrace{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n}\right)}_{1=n}\left(0 - \frac{1}{n}\right) = 0$$
$$L = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

Aufgabe 9.7 (aka 9.4)

$$2x - \frac{dx}{2} = c \qquad || \cdot 2$$
$$4x - dx = 2c$$
$$x(4-d) = 2$$
$$x = \frac{2}{4-d}$$

Aufgabe 9.8 (aka 9.5)

$$\frac{1}{x-t} = 1 - \frac{1}{t} \qquad || \cdot t(x-t)$$
$$t = t(x-t) - (x-t)$$
$$t = tx - t^2 - x + t$$
$$x - tx = t^2$$
$$x(1-t) = t^2$$
$$x = \frac{t^2}{1-t}$$

Aufgabe 9.9 (aka 9.6)

Zähler des Bruchs: x

Nenner des Bruchs: $x + 3$

$$\frac{x}{x+3} + 1 = \frac{3}{2} \quad || \cdot 2(x+3)$$
$$2x + 2(x+3) = 3(x+3)$$
$$2x + 2x + 6 = 3x + 9$$
$$x = 3$$

Der Bruch hat den Wert $\frac{3}{8}$.

Aufgabe 9.10 (aka 9.7)

Zeit, welche die kleine Pumpe für 1 Tank braucht: x Minuten

Zeit, welche die grosse Pumpe für 1 Tank braucht: 20 Minuten

Zeit, welche beide Pumpen für 1 Tank braucht: 15 Minuten

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{20} = \frac{1}{15} \quad || \cdot 60x$$
$$60 + 3x = 4x$$
$$x = 60$$

Die kleine Pumpe würde den Tank alleine in 60 Minuten füllen.