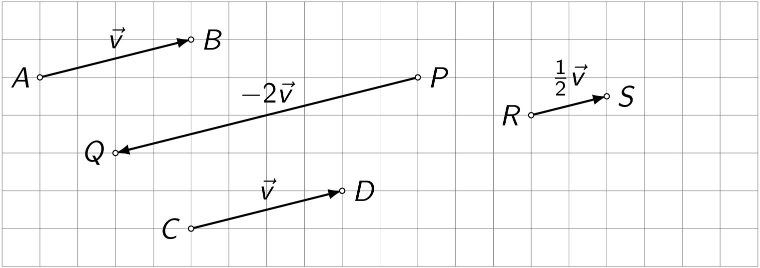
Ähnlichkeit

Theorie

26. November 2019

Vektoren

Ein Vektor $\vec{v}$ ist die Menge aller Pfeile mit gleicher Länge und gleicher Richtung. Ein einzelner Pfeil ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, ...) ist ein Repräsentant von $\vec{v}$. Ein Vektor wird mit einer Zahl multipliziert, indem man Länge mit dieser Zahl multipliziert aber seine Richtung beibehält. Ist die Zahl negativ, wird der Vektor um $180°$ gedreht.



Beispiel 1.1

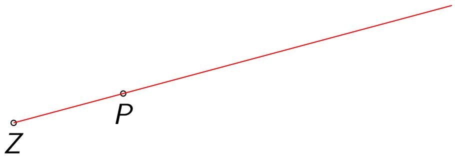
Gegeben: Punkte Z und P.

Gesucht: Punkt P' mit $\overrightarrow{ZP'} = 3 \cdot \overrightarrow{ZP}$

Beispiel 1.1

Gegeben: Punkte Z und P.

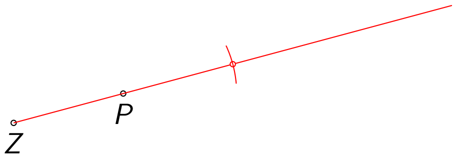
Gesucht: Punkt P' mit $\overrightarrow{ZP'} = 3 \cdot \overrightarrow{ZP}$



Beispiel 1.1

Gegeben: Punkte Z und P.

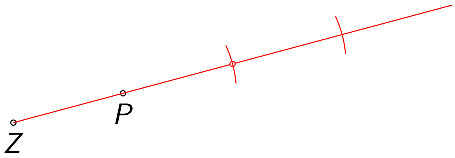
Gesucht: Punkt P' mit $\overrightarrow{ZP'} = 3 \cdot \overrightarrow{ZP}$



Beispiel 1.1

Gegeben: Punkte Z und P.

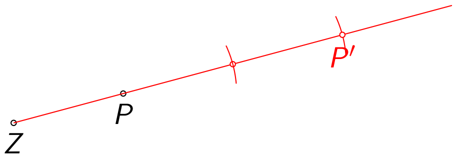
Gesucht: Punkt P' mit $\overrightarrow{ZP'} = 3 \cdot \overrightarrow{ZP}$



Beispiel 1.1

Gegeben: Punkte Z und P.

Gesucht: Punkt P' mit $\overrightarrow{ZP'} = 3 \cdot \overrightarrow{ZP}$



Beispiel 1.2

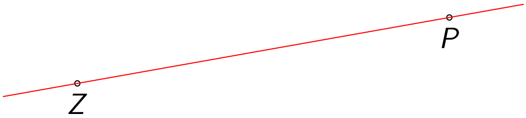
Gegeben: Punkte Z und P.

Gesucht: Punkt P' mit $\overrightarrow{ZP'} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{ZP}$

Beispiel 1.2

Gegeben: Punkte Z und P.

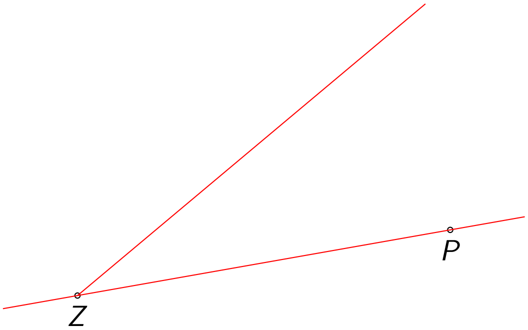
Gesucht: Punkt P' mit $\overrightarrow{ZP'} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{ZP}$



Beispiel 1.2

Gegeben: Punkte Z und P.

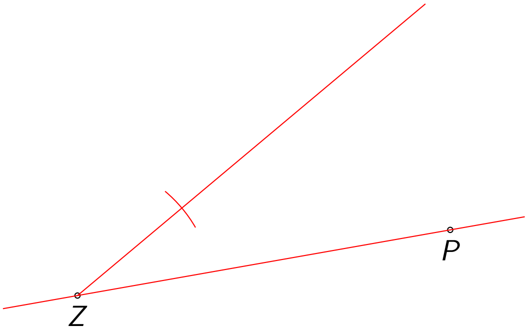
Gesucht: Punkt P' mit $\overrightarrow{ZP'} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{ZP}$



Beispiel 1.2

Gegeben: Punkte Z und P.

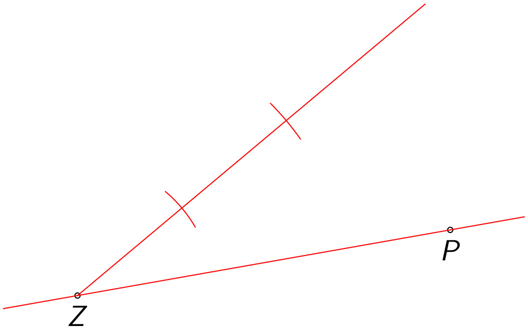
Gesucht: Punkt P' mit $\overrightarrow{ZP'} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{ZP}$



Beispiel 1.2

Gegeben: Punkte Z und P.

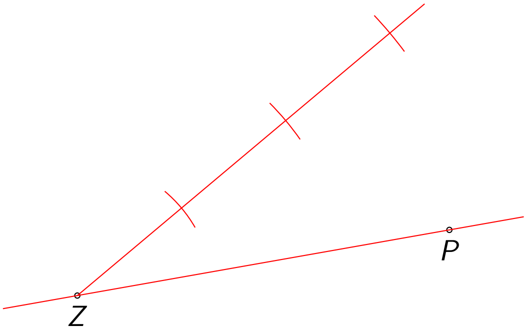
Gesucht: Punkt P' mit $\overrightarrow{ZP'} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{ZP}$



Beispiel 1.2

Gegeben: Punkte Z und P.

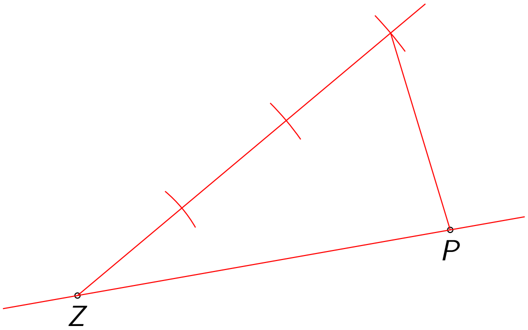
Gesucht: Punkt P' mit $\overrightarrow{ZP'} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{ZP}$



Beispiel 1.2

Gegeben: Punkte Z und P.

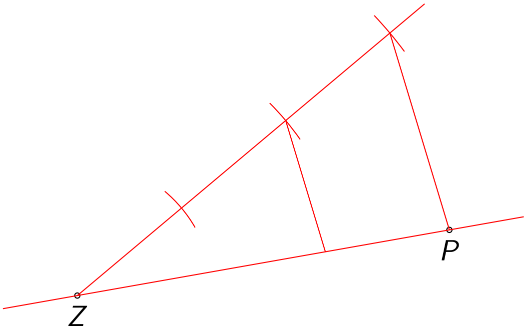
Gesucht: Punkt P' mit $\overrightarrow{ZP'} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{ZP}$



Beispiel 1.2

Gegeben: Punkte Z und P.

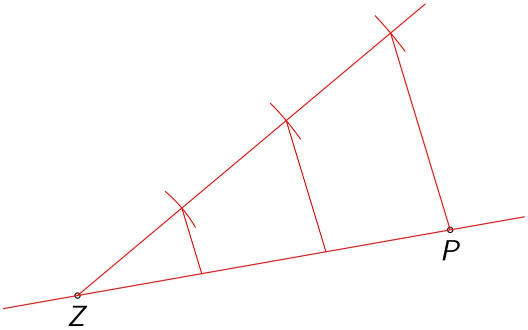
Gesucht: Punkt P' mit $\overrightarrow{ZP'} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{ZP}$



Beispiel 1.2

Gegeben: Punkte Z und P.

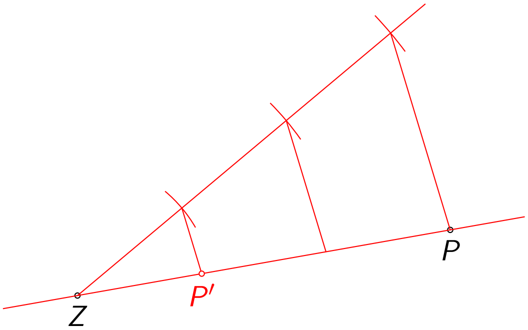
Gesucht: Punkt P' mit $\overrightarrow{ZP'} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{ZP}$



Beispiel 1.2

Gegeben: Punkte Z und P.

Gesucht: Punkt P' mit $\overrightarrow{ZP'} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{ZP}$



Beispiel 1.3

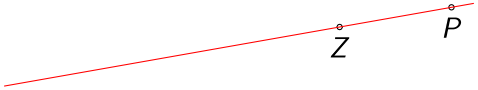
Gegeben: Punkte Z und P.

Gesucht: Punkt P' mit $\overrightarrow{ZP'} = -2 \cdot \overrightarrow{ZP} = 2 \cdot \overrightarrow{PZ}$

Beispiel 1.3

Gegeben: Punkte Z und P.

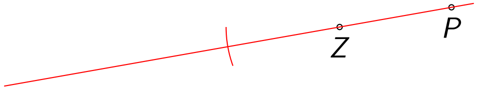
Gesucht: Punkt P' mit $\overrightarrow{ZP'} = -2 \cdot \overrightarrow{ZP} = 2 \cdot \overrightarrow{PZ}$



Beispiel 1.3

Gegeben: Punkte Z und P.

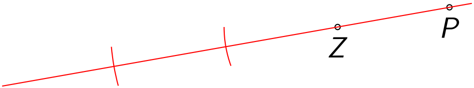
Gesucht: Punkt P' mit $\overrightarrow{ZP'} = -2 \cdot \overrightarrow{ZP} = 2 \cdot \overrightarrow{PZ}$



Beispiel 1.3

Gegeben: Punkte Z und P.

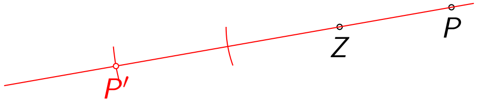
Gesucht: Punkt P' mit $\overrightarrow{ZP'} = -2 \cdot \overrightarrow{ZP} = 2 \cdot \overrightarrow{PZ}$



Beispiel 1.3

Gegeben: Punkte Z und P.

Gesucht: Punkt P' mit $\overrightarrow{ZP'} = -2 \cdot \overrightarrow{ZP} = 2 \cdot \overrightarrow{PZ}$



Definition

Gegeben ist ein Punkt Z in der Ebene (oder dem Raum) und $k \neq 0$ eine reelle Zahl.

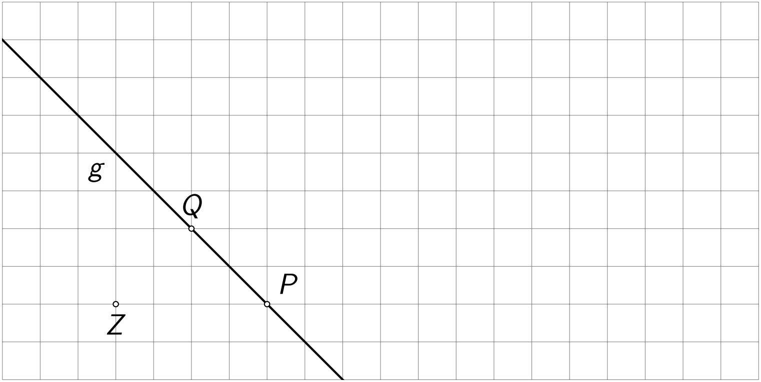
Eine zentrische Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckungsfaktor k ist eine Abbildung der Ebene (des Raumes) auf sich selbst, bei der jeder Punkt P auf den Bildpunkt P' abgebildet wird, so dass

$$\overrightarrow{ZP'} = k \cdot \overrightarrow{ZP}$$

gilt.

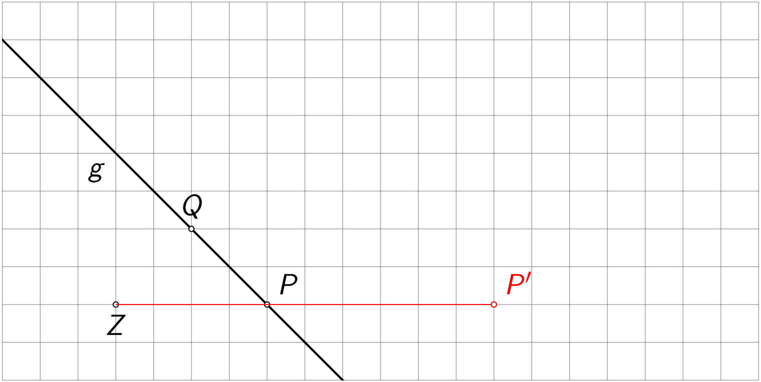
Beispiel 1.4

Bilde die Gerade $g = (PQ)$ durch eine zentrischen Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckungsfaktor $k = 2.5$ auf die Gerade $g' = (P'Q')$ ab.



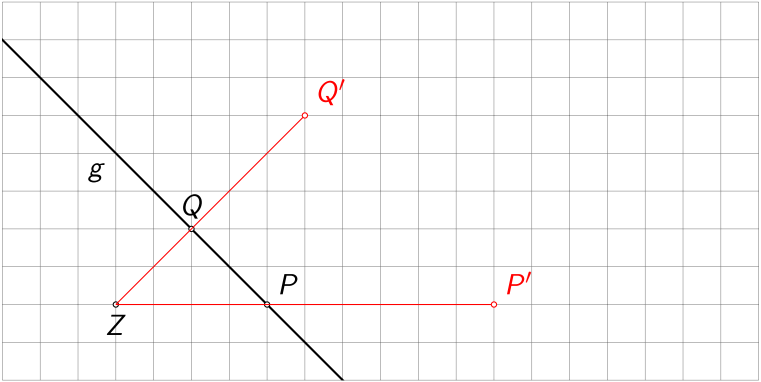
Beispiel 1.4

Bilde die Gerade $g = (PQ)$ durch eine zentrischen Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckungsfaktor $k = 2.5$ auf die Gerade $g' = (P'Q')$ ab.



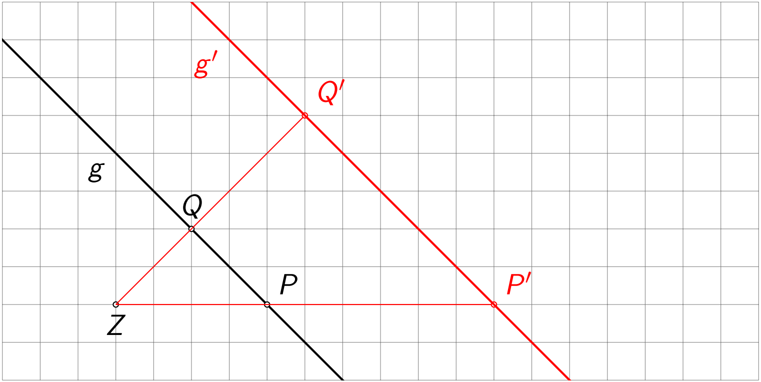
Beispiel 1.4

Bilde die Gerade $g = (PQ)$ durch eine zentrischen Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckungsfaktor $k = 2.5$ auf die Gerade $g' = (P'Q')$ ab.



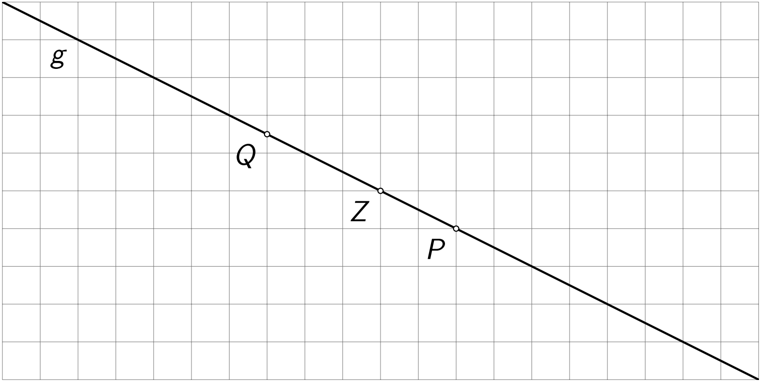
Beispiel 1.4

Bilde die Gerade $g = (PQ)$ durch eine zentrischen Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckungsfaktor $k = 2.5$ auf die Gerade $g' = (P'Q')$ ab.



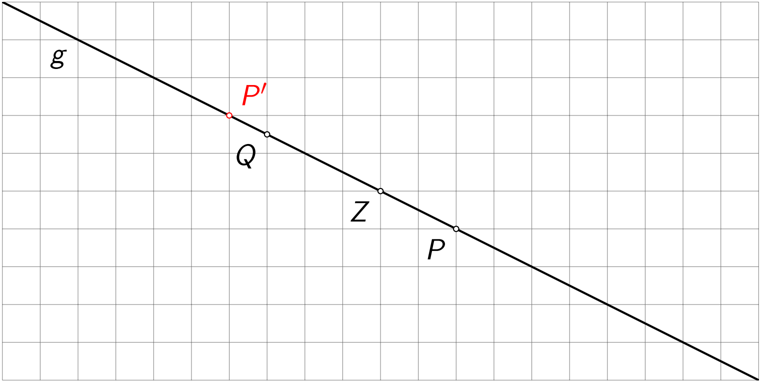
Beispiel 1.5

Bilde die Gerade $g = (PQ)$ durch eine zentrischen Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckungsfaktor $k = -2$ auf die Gerade $g' = (P'Q')$ ab.



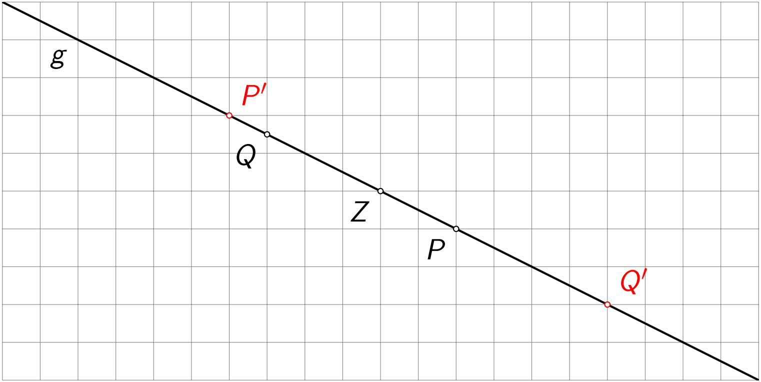
Beispiel 1.5

Bilde die Gerade $g = (PQ)$ durch eine zentrischen Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckungsfaktor $k = -2$ auf die Gerade $g' = (P'Q')$ ab.



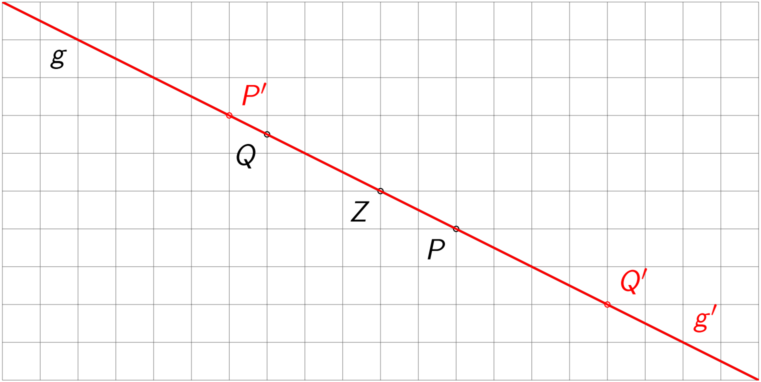
Beispiel 1.5

Bilde die Gerade $g = (PQ)$ durch eine zentrischen Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckungsfaktor $k = -2$ auf die Gerade $g' = (P'Q')$ ab.



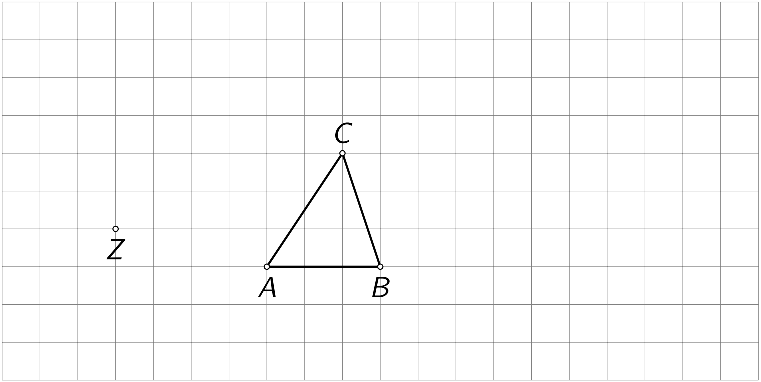
Beispiel 1.5

Bilde die Gerade $g = (PQ)$ durch eine zentrischen Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckungsfaktor $k = -2$ auf die Gerade $g' = (P'Q')$ ab.



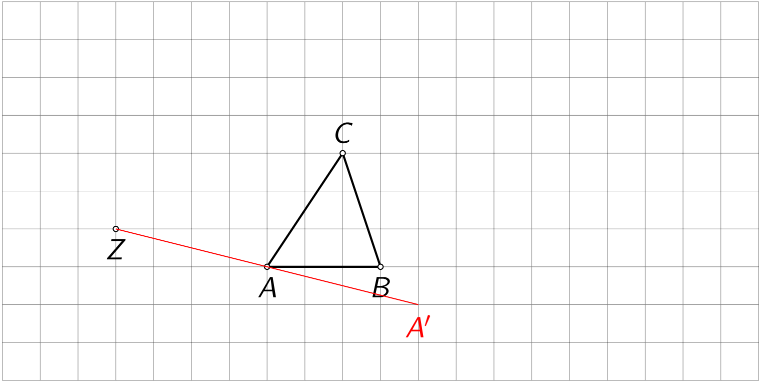
Beispiel 1.6

Bilde das Dreieck ABC durch eine zentrischen Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckungsfaktor $k = 2$ auf das Dreieck $A'B'C'$ ab.



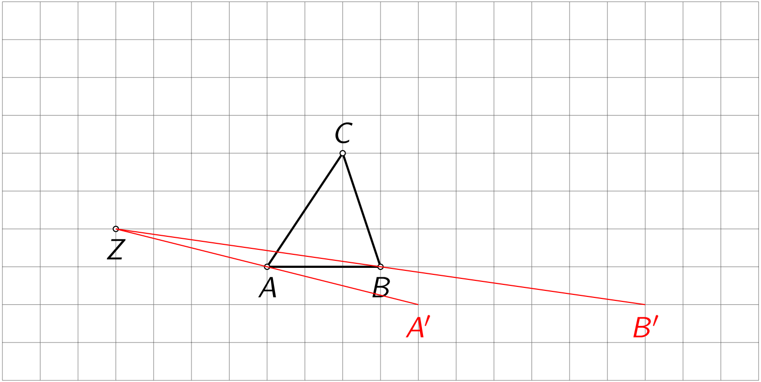
Beispiel 1.6

Bilde das Dreieck ABC durch eine zentrischen Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckungsfaktor $k = 2$ auf das Dreieck $A'B'C'$ ab.



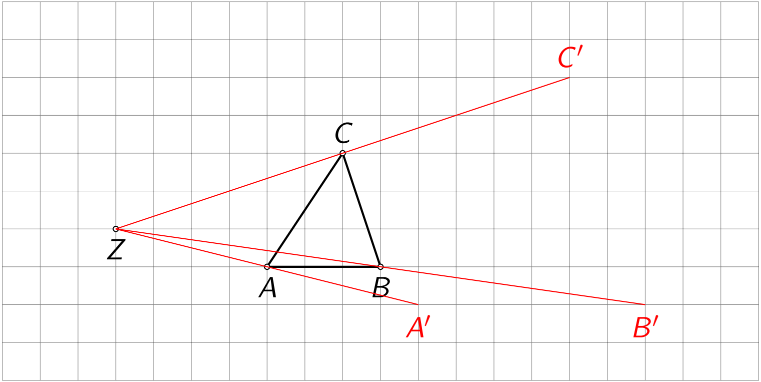
Beispiel 1.6

Bilde das Dreieck ABC durch eine zentrischen Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckungsfaktor $k = 2$ auf das Dreieck $A'B'C'$ ab.



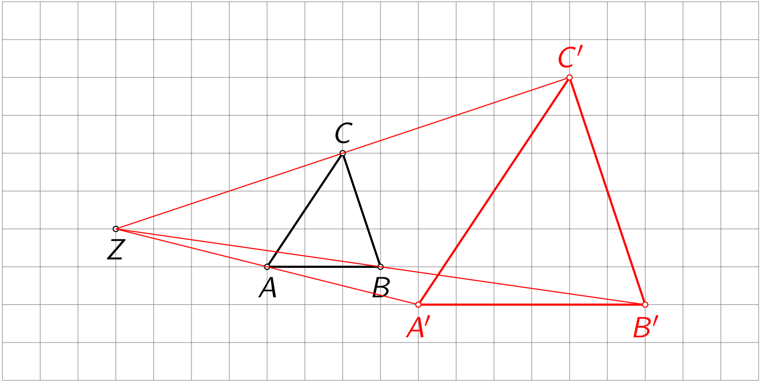
Beispiel 1.6

Bilde das Dreieck ABC durch eine zentrischen Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckungsfaktor $k = 2$ auf das Dreieck $A'B'C'$ ab.



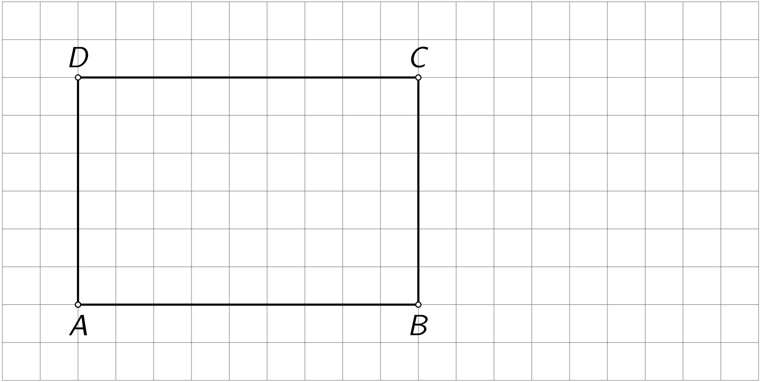
Beispiel 1.6

Bilde das Dreieck ABC durch eine zentrischen Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckungsfaktor $k = 2$ auf das Dreieck $A'B'C'$ ab.



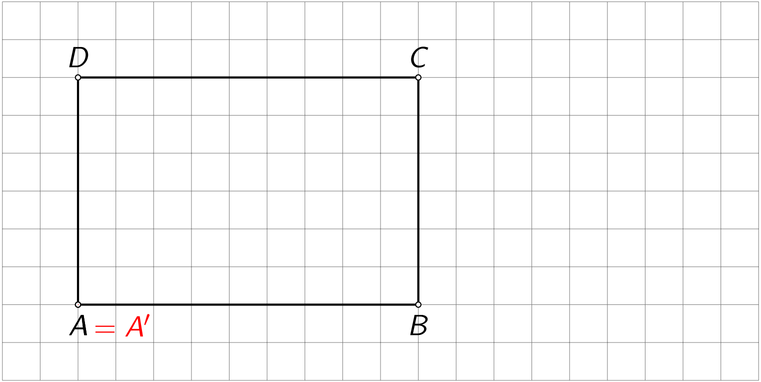
Beispiel 1.7

Bilde das Rechteck $ABCD$ durch eine zentrischen Streckung mit dem Zentrum $Z = A$ und dem Streckungsfaktor $k = \frac{1}{3}$ auf das Rechteck $A'B'C'D'$ ab.



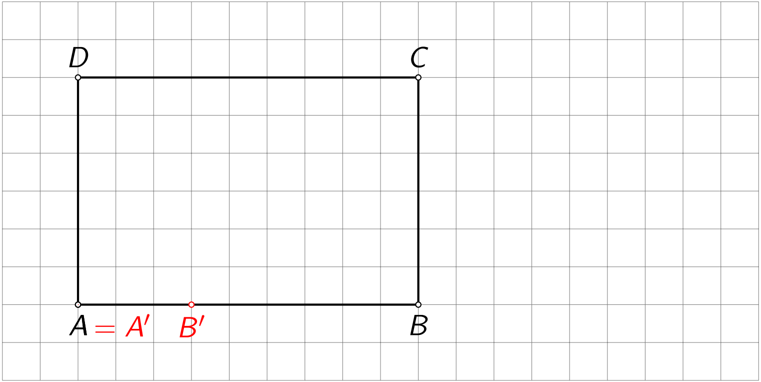
Beispiel 1.7

Bilde das Rechteck $ABCD$ durch eine zentrischen Streckung mit dem Zentrum $Z = A$ und dem Streckungsfaktor $k = \frac{1}{3}$ auf das Rechteck $A'B'C'D'$ ab.



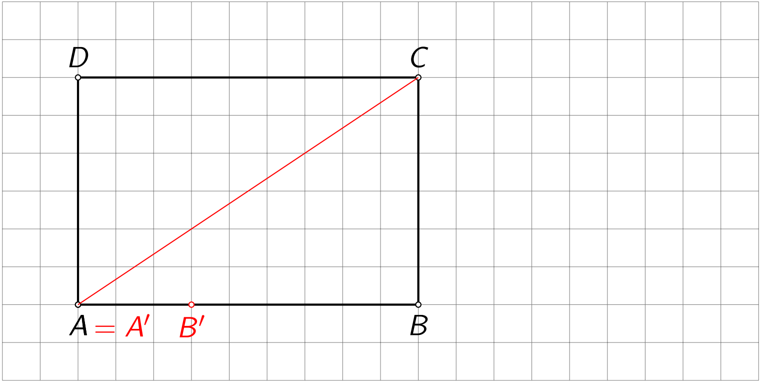
Beispiel 1.7

Bilde das Rechteck $ABCD$ durch eine zentrischen Streckung mit dem Zentrum $Z = A$ und dem Streckungsfaktor $k = \frac{1}{3}$ auf das Rechteck $A'B'C'D'$ ab.



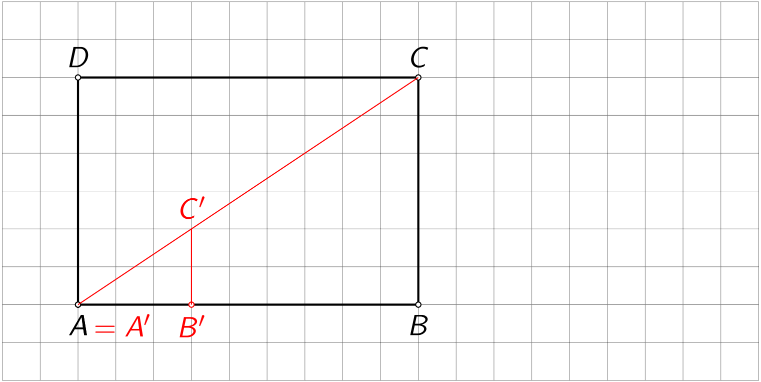
Beispiel 1.7

Bilde das Rechteck $ABCD$ durch eine zentrischen Streckung mit dem Zentrum $Z = A$ und dem Streckungsfaktor $k = \frac{1}{3}$ auf das Rechteck $A'B'C'D'$ ab.



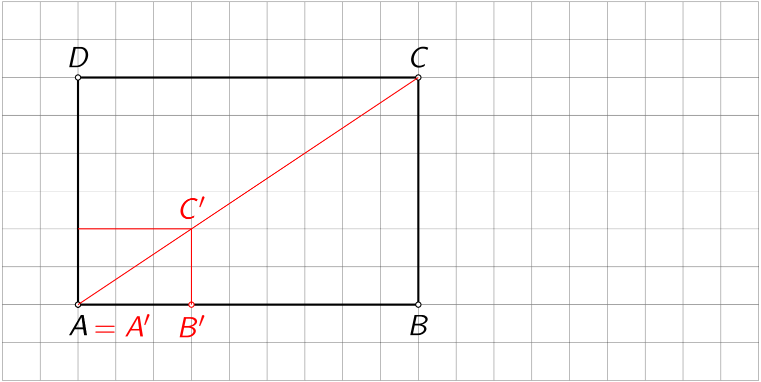
Beispiel 1.7

Bilde das Rechteck $ABCD$ durch eine zentrischen Streckung mit dem Zentrum $Z = A$ und dem Streckungsfaktor $k = \frac{1}{3}$ auf das Rechteck $A'B'C'D'$ ab.



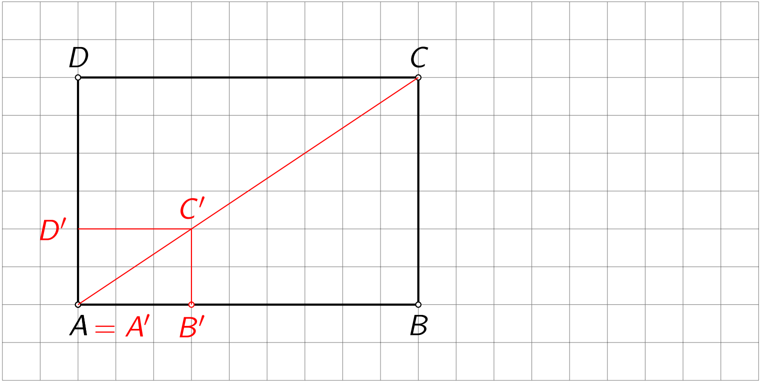
Beispiel 1.7

Bilde das Rechteck $ABCD$ durch eine zentrischen Streckung mit dem Zentrum $Z = A$ und dem Streckungsfaktor $k = \frac{1}{3}$ auf das Rechteck $A'B'C'D'$ ab.



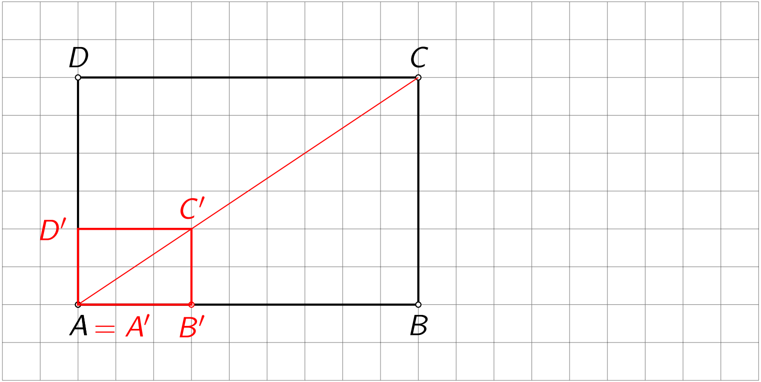
Beispiel 1.7

Bilde das Rechteck $ABCD$ durch eine zentrischen Streckung mit dem Zentrum $Z = A$ und dem Streckungsfaktor $k = \frac{1}{3}$ auf das Rechteck $A'B'C'D'$ ab.



Beispiel 1.7

Bilde das Rechteck $ABCD$ durch eine zentrischen Streckung mit dem Zentrum $Z = A$ und dem Streckungsfaktor $k = \frac{1}{3}$ auf das Rechteck $A'B'C'D'$ ab.



Eigenschaften der zentrischen Streckung

- Das Streckungszentrum ist der einzige Fixpunkt.

Eigenschaften der zentrischen Streckung

- Das Streckungszentrum ist der einzige Fixpunkt.
- Jede Gerade g mit $Z \in g$ wird auf sich selbst abgebildet (*Fixgerade*).

Eigenschaften der zentrischen Streckung

- Das Streckungszentrum ist der einzige Fixpunkt.
- Jede Gerade g mit $Z \in g$ wird auf sich selbst abgebildet (*Fixgerade*).
- Jede Gerade g mit $Z \notin g$ wird auf $g' \parallel g$ abgebildet.

Eigenschaften der zentrischen Streckung

- Das Streckungszentrum ist der einzige Fixpunkt.
- Jede Gerade g mit $Z \in g$ wird auf sich selbst abgebildet (*Fixgerade*).
- Jede Gerade g mit $Z \notin g$ wird auf $g' \parallel g$ abgebildet.
- Bild- und Urbildfigur haben den gleichen Umlaufssinn.

Eigenschaften der zentrischen Streckung

- Das Streckungszentrum ist der einzige Fixpunkt.
- Jede Gerade g mit $Z \in g$ wird auf sich selbst abgebildet (*Fixgerade*).
- Jede Gerade g mit $Z \notin g$ wird auf $g' \parallel g$ abgebildet.
- Bild- und Urbildfigur haben den gleichen Umlaufssinn.
- Entsprechende Winkel in Bild- und Urbildfigur sind gleich.

Eigenschaften der zentrischen Streckung

- Das Streckungszentrum ist der einzige Fixpunkt.
- Jede Gerade g mit $Z \in g$ wird auf sich selbst abgebildet (*Fixgerade*).
- Jede Gerade g mit $Z \notin g$ wird auf $g' \parallel g$ abgebildet.
- Bild- und Urbildfigur haben den gleichen Umlaufssinn.
- Entsprechende Winkel in Bild- und Urbildfigur sind gleich.
- Die Länge einer Bildstrecke verhält sich zur Länge der Urbildstrecke wie $|k| : 1$.

Eigenschaften der zentrischen Streckung

- Das Streckungszentrum ist der einzige Fixpunkt.
- Jede Gerade g mit $Z \in g$ wird auf sich selbst abgebildet (*Fixgerade*).
- Jede Gerade g mit $Z \notin g$ wird auf $g' \parallel g$ abgebildet.
- Bild- und Urbildfigur haben den gleichen Umlaufssinn.
- Entsprechende Winkel in Bild- und Urbildfigur sind gleich.
- Die Länge einer Bildstrecke verhält sich zur Länge der Urbildstrecke wie $|k| : 1$.
- Der Inhalt einer Bildfigur verhält sich zum Inhalt der Urbildfigur wie $k^2 : 1$.

$1 < k < \infty$ $k = 1$ $0 < k < 1$	
$-1 < k < 0$ $k = -1$ $-\infty < k < -1$	

$1 < k < \infty$ $k = 1$ $0 < k < 1$	Vergrösserung
$-1 < k < 0$ $k = -1$ $-\infty < k < -1$	

$1 < k < \infty$ $k = 1$ $0 < k < 1$	Vergrösserung identische Abbildung
$-1 < k < 0$ $k = -1$ $-\infty < k < -1$	

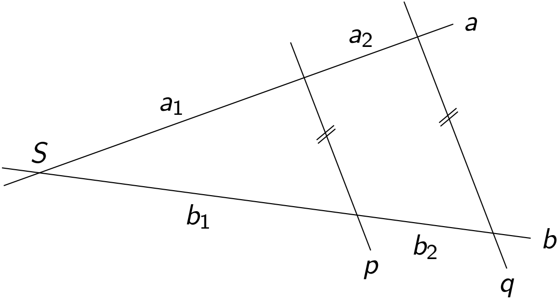
$1 < k < \infty$	Vergrösserung
$k = 1$	identische Abbildung
$0 < k < 1$	Verkleinerung
$-1 < k < 0$	
$k = -1$	
$-\infty < k < -1$	

$1 < k < \infty$	Vergrösserung
$k = 1$	identische Abbildung
$0 < k < 1$	Verkleinerung
$-1 < k < 0$	Verkleinerung und Spiegelung an Z
$k = -1$	
$-\infty < k < -1$	

$1 < k < \infty$	Vergrösserung
$k = 1$	identische Abbildung
$0 < k < 1$	Verkleinerung
$-1 < k < 0$	Verkleinerung und Spiegelung an Z
$k = -1$	Spiegelung an Z
$-\infty < k < -1$	

$1 < k < \infty$	Vergrösserung
$k = 1$	identische Abbildung
$0 < k < 1$	Verkleinerung
$-1 < k < 0$	Verkleinerung und Spiegelung an Z
$k = -1$	Spiegelung an Z
$-\infty < k < -1$	Vergrösserung und Spiegelung an Z

Zwei sich im Punkt S schneidende Geraden a und b werden von den Parallelen p und q geschnitten.



Weil p und q parallel sind, muss es eine zentrische Streckung mit Zentrum S und Faktor k geben, die p auf q abbildet. Also:

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1} = k \quad \text{und} \quad \frac{b_1 + b_2}{b_1} = k$$

Daraus folgt:

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1} = \frac{b_1 + b_2}{b_1}$$

$$\frac{a_1}{a_1} + \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_1}{b_1} + \frac{b_2}{b_1}$$

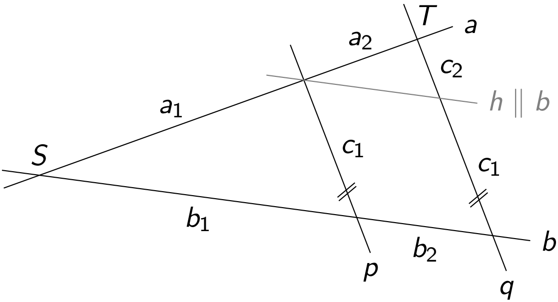
$$1 + \frac{a_2}{a_1} = 1 + \frac{b_2}{b_1}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

Der erste Strahlensatz

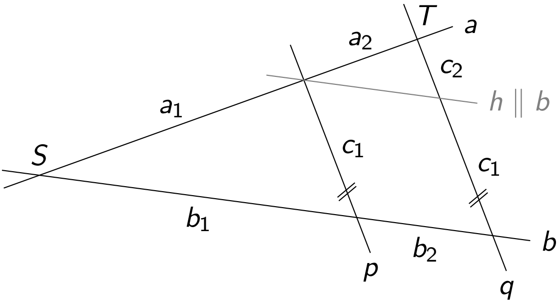
Werden zwei sich schneidende Geraden von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf der einen Geraden wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Geraden.

Wir ergänzen die obige Figur um die Gerade $h \parallel b$ durch $p \cap a$.



Den zweiten Strahlensatz gewinnt man durch Anwendung des ersten Strahlensatzes auf die sich im Punkt T schneidenden Geraden a und q und die Parallelen h und b.

Wir ergänzen die obige Figur um die Gerade $h \parallel b$ durch $p \cap a$.



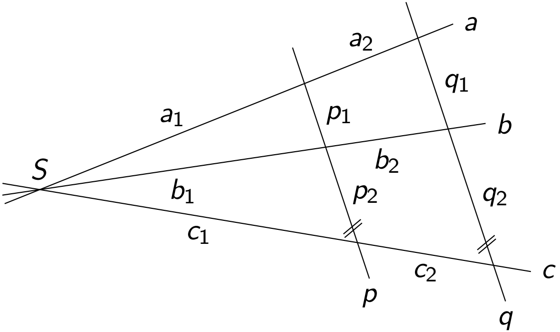
Den zweiten Strahlensatz gewinnt man durch Anwendung des ersten Strahlensatzes auf die sich im Punkt T schneidenden Geraden a und q und die Parallelen h und b.

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{c_1}{c_1 + c_2}$$

Der zweite Strahlensatz

Werden zwei sich schneidende Geraden von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die *vom Schnittpunkt aus gemessenen* Abschnitte auf einer der Geraden wie die entsprechenden Abschnitte auf den Parallelen.

Der dritte Strahlensatz kann aus dem ersten und dem zweiten Strahlensatz hergeleitet werden.



Wegen des ersten Strahlensatzes gilt.

Wegen des ersten Strahlensatzes gilt.

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{b_1}{b_1 + b_2}$$

Wegen des ersten Strahlensatzes gilt.

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{b_1}{b_1 + b_2}$$

Wegen des zweiten Strahlensatzes gelten:

Wegen des ersten Strahlensatzes gilt.

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{b_1}{b_1 + b_2}$$

Wegen des zweiten Strahlensatzes gelten:

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{p_1}{q_1} \quad \text{und} \quad \frac{b_1}{b_1 + b_2} = \frac{p_2}{q_2}$$

Wegen des ersten Strahlensatzes gilt.

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{b_1}{b_1 + b_2}$$

Wegen des zweiten Strahlensatzes gelten:

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{p_1}{q_1} \quad \text{und} \quad \frac{b_1}{b_1 + b_2} = \frac{p_2}{q_2}$$

Da aber die linken Seiten der beiden letzten Gleichung wegen des ersten Strahlensatzes gleich sind, müssen auch die rechten Seiten dieser Gleichungen übereinstimmen. Somit:

Wegen des ersten Strahlensatzes gilt.

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{b_1}{b_1 + b_2}$$

Wegen des zweiten Strahlensatzes gelten:

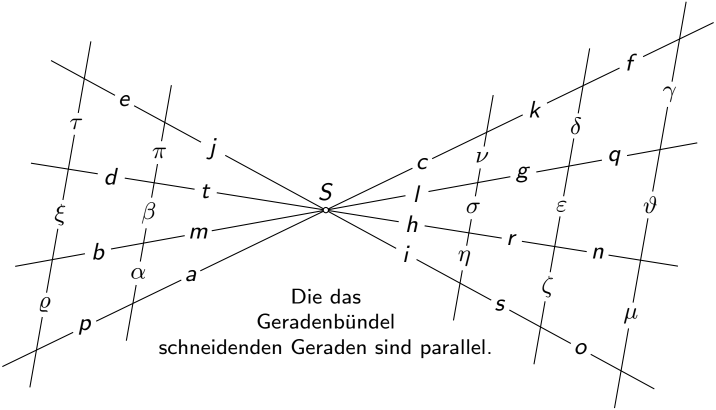
$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{p_1}{q_1} \quad \text{und} \quad \frac{b_1}{b_1 + b_2} = \frac{p_2}{q_2}$$

Da aber die linken Seiten der beiden letzten Gleichung wegen des ersten Strahlensatzes gleich sind, müssen auch die rechten Seiten dieser Gleichungen übereinstimmen. Somit:

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2}$$

Der dritte Strahlensatz

Werden drei sich schneidende Geraden von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf der ersten Parallelen wie die entsprechenden Abschnitte auf der zweiten Parallelen.



Die das
Geradenbündel
schneidenden Geraden sind parallel.

Vervollständige die Proportionen mit dem ersten Strahlensatz.

(a) $c : f = h : \square$
(b) $q : l = \square : i$
(c) $l : m = c : \square$
(d) $h : (r + n) = \square : (s + o)$
(e) $b : \square = \square : s$
(f) $(\square + a) : f = (r + \square) : \square$

Vervollständige die Proportionen mit dem ersten Strahlensatz.

(a) $c : f = h : \boxed{n}$

(b) $q : l = \boxed{} : i$

(c) $l : m = c : \boxed{}$

(d) $h : (r + n) = \boxed{} : (s + o)$

(e) $b : \boxed{} = \boxed{} : s$

(f) $(\boxed{} + a) : f = (r + \boxed{}) : \boxed{}$

Vervollständige die Proportionen mit dem ersten Strahlensatz.

(a) $c : f = h : \boxed{n}$

(b) $q : l = \boxed{o} : i$

(c) $l : m = c : \boxed{}$

(d) $h : (r + n) = \boxed{} : (s + o)$

(e) $b : \boxed{} = \boxed{} : s$

(f) $(\boxed{} + a) : f = (r + \boxed{}) : \boxed{}$

Vervollständige die Proportionen mit dem ersten Strahlensatz.

(a) $c : f = h : \boxed{n}$

(b) $q : l = \boxed{o} : i$

(c) $l : m = c : \boxed{a}$

(d) $h : (r + n) = \boxed{} : (s + o)$

(e) $b : \boxed{} = \boxed{} : s$

(f) $(\boxed{} + a) : f = (r + \boxed{}) : \boxed{}$

Vervollständige die Proportionen mit dem ersten Strahlensatz.

(a) $c : f = h : \boxed{n}$
(b) $q : l = \boxed{o} : i$
(c) $l : m = c : \boxed{a}$
(d) $h : (r + n) = \boxed{i} : (s + o)$
(e) $b : \boxed{} = \boxed{} : s$
(f) $(\boxed{} + a) : f = (r + \boxed{}) : \boxed{}$

Vervollständige die Proportionen mit dem ersten Strahlensatz.

(a) $c : f = h : \boxed{n}$
(b) $q : l = \boxed{o} : i$
(c) $l : m = c : \boxed{a}$
(d) $h : (r + n) = \boxed{i} : (s + o)$
(e) $b : \boxed{g} = \boxed{e} : s$
(f) $(\boxed{} + a) : f = (r + \boxed{}) : \boxed{}$

Vervollständige die Proportionen mit dem ersten Strahlensatz.

(a) $c : f = h : \boxed{n}$

(b) $q : l = \boxed{o} : i$

(c) $l : m = c : \boxed{a}$

(d) $h : (r + n) = \boxed{i} : (s + o)$

(e) $b : \boxed{g} = \boxed{e} : s$

(f) $(\boxed{k} + a) : f = (r + \boxed{t}) : \boxed{n}$

Vervollständige die Proportionen mit dem zweiten Strahlensatz.

(a) $(l : \sigma) = (l + g + q) : \square$

(b) $(c + k) : \delta = (\square + \square + \square) : \gamma$

(c) $c : \nu = a : \square$

(d) $(t + d) : \square = (h + r) : \square$

(e) $c : (\nu + \sigma) = (c + \square) : (\square + \varepsilon)$

(f) $t : (\pi + \square) = \square : (\square + \sigma)$

Vervollständige die Proportionen mit dem zweiten Strahlensatz.

(a) $(l : \sigma) = (l + g + q) : \boxed{\vartheta}$

(b) $(c + k) : \delta = (\boxed{} + \boxed{} + \boxed{}) : \gamma$

(c) $c : \nu = a : \boxed{}$

(d) $(t + d) : \boxed{} = (h + r) : \boxed{}$

(e) $c : (\nu + \sigma) = (c + \boxed{}) : (\boxed{} + \varepsilon)$

(f) $t : (\pi + \boxed{}) = \boxed{} : (\boxed{} + \sigma)$

Vervollständige die Proportionen mit dem zweiten Strahlensatz.

(a) $(l : \sigma) = (l + g + q) : \boxed{\vartheta}$

(b) $(c + k) : \delta = (\boxed{c} + \boxed{k} + \boxed{f}) : \gamma$

(c) $c : \nu = a : \boxed{}$

(d) $(t + d) : \boxed{} = (h + r) : \boxed{}$

(e) $c : (\nu + \sigma) = (c + \boxed{}) : (\boxed{} + \varepsilon)$

(f) $t : (\pi + \boxed{}) = \boxed{} : (\boxed{} + \sigma)$

Vervollständige die Proportionen mit dem zweiten Strahlensatz.

(a) $(l : \sigma) = (l + g + q) : \boxed{\vartheta}$

(b) $(c + k) : \delta = (\boxed{c} + \boxed{k} + \boxed{f}) : \gamma$

(c) $c : \nu = a : \boxed{\alpha}$

(d) $(t + d) : \boxed{} = (h + r) : \boxed{}$

(e) $c : (\nu + \sigma) = (c + \boxed{}) : (\boxed{} + \varepsilon)$

(f) $t : (\pi + \boxed{}) = \boxed{} : (\boxed{} + \sigma)$

Vervollständige die Proportionen mit dem zweiten Strahlensatz.

(a) $(l : \sigma) = (l + g + q) : \boxed{\vartheta}$

(b) $(c + k) : \delta = (\boxed{c} + \boxed{k} + \boxed{f}) : \gamma$

(c) $c : \nu = a : \boxed{\alpha}$

(d) $(t + d) : \boxed{\tau} = (h + r) : \boxed{\zeta}$

(e) $c : (\nu + \sigma) = (c + \boxed{}) : (\boxed{} + \varepsilon)$

(f) $t : (\pi + \boxed{}) = \boxed{} : (\boxed{} + \sigma)$

Vervollständige die Proportionen mit dem zweiten Strahlensatz.

(a) $(l : \sigma) = (l + g + q) : \boxed{\vartheta}$

(b) $(c + k) : \delta = (\boxed{c} + \boxed{k} + \boxed{f}) : \gamma$

(c) $c : \nu = a : \boxed{\alpha}$

(d) $(t + d) : \boxed{\tau} = (h + r) : \boxed{\zeta}$

(e) $c : (\nu + \sigma) = (c + \boxed{k}) : (\boxed{\delta} + \varepsilon)$

(f) $t : (\pi + \boxed{}) = \boxed{} : (\boxed{} + \sigma)$

Vervollständige die Proportionen mit dem zweiten Strahlensatz.

(a) $(l : \sigma) = (l + g + q) : \boxed{\vartheta}$

(b) $(c + k) : \delta = (\boxed{c} + \boxed{k} + \boxed{f}) : \gamma$

(c) $c : \nu = a : \boxed{\alpha}$

(d) $(t + d) : \boxed{\tau} = (h + r) : \boxed{\zeta}$

(e) $c : (\nu + \sigma) = (c + \boxed{k}) : (\boxed{\delta} + \varepsilon)$

(f) $t : (\pi + \boxed{\beta}) = \boxed{h} : (\boxed{\eta} + \sigma)$

Vervollständige die Proportionen mit dem dritten Strahlensatz.

(a) $\sigma : \eta = \varepsilon : \square$

(b) $\mu : \gamma = \square : \nu$

(c) $\delta : (\varepsilon + \zeta) = \gamma : (\square + \mu)$

(d) $\alpha : \beta = \nu : \square$

(e) $\gamma : \mu = \varrho : \square$

(f) $\tau : (\square + \xi) = \eta : (\eta + \sigma)$

Vervollständige die Proportionen mit dem dritten Strahlensatz.

(a) $\sigma : \eta = \varepsilon : \boxed{\zeta}$

(b) $\mu : \gamma = \boxed{} : \nu$

(c) $\delta : (\varepsilon + \zeta) = \gamma : (\boxed{} + \mu)$

(d) $\alpha : \beta = \nu : \boxed{}$

(e) $\gamma : \mu = \varrho : \boxed{}$

(f) $\tau : (\boxed{} + \xi) = \eta : (\eta + \sigma)$

Vervollständige die Proportionen mit dem dritten Strahlensatz.

(a) $\sigma : \eta = \varepsilon : \boxed{\zeta}$

(b) $\mu : \gamma = \boxed{\eta} : \nu$

(c) $\delta : (\varepsilon + \zeta) = \gamma : (\boxed{} + \mu)$

(d) $\alpha : \beta = \nu : \boxed{}$

(e) $\gamma : \mu = \varrho : \boxed{}$

(f) $\tau : (\boxed{} + \xi) = \eta : (\eta + \sigma)$

Vervollständige die Proportionen mit dem dritten Strahlensatz.

(a) $\sigma : \eta = \varepsilon : \boxed{\zeta}$
(b) $\mu : \gamma = \boxed{\eta} : \nu$
(c) $\delta : (\varepsilon + \zeta) = \gamma : (\boxed{\vartheta} + \mu)$
(d) $\alpha : \beta = \nu : \boxed{}$
(e) $\gamma : \mu = \varrho : \boxed{}$
(f) $\tau : (\boxed{} + \xi) = \eta : (\eta + \sigma)$

Vervollständige die Proportionen mit dem dritten Strahlensatz.

(a) $\sigma : \eta = \varepsilon : \boxed{\zeta}$
(b) $\mu : \gamma = \boxed{\eta} : \nu$
(c) $\delta : (\varepsilon + \zeta) = \gamma : (\boxed{\vartheta} + \mu)$
(d) $\alpha : \beta = \nu : \boxed{\sigma}$
(e) $\gamma : \mu = \varrho : \boxed{}$
(f) $\tau : (\boxed{} + \xi) = \eta : (\eta + \sigma)$

Vervollständige die Proportionen mit dem dritten Strahlensatz.

(a) $\sigma : \eta = \varepsilon : \boxed{\zeta}$

(b) $\mu : \gamma = \boxed{\eta} : \nu$

(c) $\delta : (\varepsilon + \zeta) = \gamma : (\boxed{\vartheta} + \mu)$

(d) $\alpha : \beta = \nu : \boxed{\sigma}$

(e) $\gamma : \mu = \varrho : \boxed{\tau}$

(f) $\tau : (\boxed{} + \xi) = \eta : (\eta + \sigma)$

Vervollständige die Proportionen mit dem dritten Strahlensatz.

(a) $\sigma : \eta = \varepsilon : \boxed{\zeta}$
(b) $\mu : \gamma = \boxed{\eta} : \nu$
(c) $\delta : (\varepsilon + \zeta) = \gamma : (\boxed{\vartheta} + \mu)$
(d) $\alpha : \beta = \nu : \boxed{\sigma}$
(e) $\gamma : \mu = \varrho : \boxed{\tau}$
(f) $\tau : (\boxed{\tau} + \xi) = \eta : (\eta + \sigma)$

Mathematische Aussagen haben oft die folgende Form: *Wenn A, dann B*.

(a) *Wenn* zwei ganze Zahlen gerade sind, *dann* ist ihre Summe gerade.

Mathematische Aussagen haben oft die folgende Form: *Wenn A, dann B*.

(a) *Wenn* zwei ganze Zahlen gerade sind, *dann* ist ihre Summe gerade.

(b) *Wenn* eine ganze Zahl ungerade ist, *dann* ist auch ihr Quadrat ungerade.

Mathematische Aussagen haben oft die folgende Form: *Wenn* A, *dann* B.

(a) *Wenn* zwei ganze Zahlen gerade sind, *dann* ist ihre Summe gerade.

(b) *Wenn* eine ganze Zahl ungerade ist, *dann* ist auch ihr Quadrat ungerade.

(c) *Wenn* eine Figur ein Quadrat ist, *dann* hat die Figur vier rechte Innenwinkel.

Mathematische Aussagen haben oft die folgende Form: *Wenn A, dann B*.

(a) *Wenn* zwei ganze Zahlen gerade sind, *dann* ist ihre Summe gerade.

(b) *Wenn* eine ganze Zahl ungerade ist, *dann* ist auch ihr Quadrat ungerade.

(c) *Wenn* eine Figur ein Quadrat ist, *dann* hat die Figur vier rechte Innenwinkel.

Man erhält die Umkehrungen dieser Aussagen, indem man den Text hinter dem *wenn*-Teil und dem *dann*-Teil vertauscht.

Achtung: Auch wenn die ursprüngliche Aussage wahr ist, muss dies nicht für ihre Umkehrung gelten.

(a) *Wenn* die Summe zweier ganzer Zahlen gerade ist, *dann* sind beide Zahlen gerade.

(a) *Wenn* die Summe zweier ganzer Zahlen gerade ist, *dann* sind beide Zahlen gerade.

Falsch, denn beide Zahlen könnten auch ungerade sein.

(a) *Wenn* die Summe zweier ganzer Zahlen gerade ist, *dann* sind beide Zahlen gerade.

Falsch, denn beide Zahlen könnten auch ungerade sein.

(b) *Wenn* das Quadrat einer ganzen Zahl ungerade ist, *dann* ist auch die Zahl selbst ungerade.

(a) *Wenn* die Summe zweier ganzer Zahlen gerade ist, *dann* sind beide Zahlen gerade.

Falsch, denn beide Zahlen könnten auch ungerade sein.

(b) *Wenn* das Quadrat einer ganzen Zahl ungerade ist, *dann* ist auch die Zahl selbst ungerade.

Wahr, denn wäre die Zahl gerade ($2n$), so wäre auch ihr Quadrat ($4n^2$) gerade.

(a) *Wenn* die Summe zweier ganzer Zahlen gerade ist, *dann* sind beide Zahlen gerade.

Falsch, denn beide Zahlen könnten auch ungerade sein.

(b) *Wenn* das Quadrat einer ganzen Zahl ungerade ist, *dann* ist auch die Zahl selbst ungerade.

Wahr, denn wäre die Zahl gerade ($2n$), so wäre auch ihr Quadrat ($4n^2$) gerade.

(c) *Wenn* eine Figur vier rechte Innenwinkel hat, *dann* ist es ein Quadrat.

(a) *Wenn* die Summe zweier ganzer Zahlen gerade ist, *dann* sind beide Zahlen gerade.

Falsch, denn beide Zahlen könnten auch ungerade sein.

(b) *Wenn* das Quadrat einer ganzen Zahl ungerade ist, *dann* ist auch die Zahl selbst ungerade.

Wahr, denn wäre die Zahl gerade ($2n$), so wäre auch ihr Quadrat ($4n^2$) gerade.

(c) *Wenn* eine Figur vier rechte Innenwinkel hat, *dann* ist es ein Quadrat.

Falsch, es könnte auch ein Rechteck sein.

Die Umkehrung des ersten Strahlensatzes

Wenn zwei sich schneidende Geraden a und b von zwei Geraden p und q geschnitten werden und sich die Abschnitte auf der Geraden a wie die entsprechenden Abschnitte auf der Geraden b verhalten, *dann* sind p und q parallel.

Die Umkehrung des ersten Strahlensatzes

Wenn zwei sich schneidende Geraden a und b von zwei Geraden p und q geschnitten werden und sich die Abschnitte auf der Geraden a wie die entsprechenden Abschnitte auf der Geraden b verhalten, *dann* sind p und q parallel.

Die Umkehrung des ersten Strahlensatzes ist gültig.

Die Umkehrung des zweiten Strahlensatzes

Wenn zwei sich schneidende Geraden a und b von zwei Geraden p und q geschnitten werden und sich die vom Schnittpunkt aus gemessenen Abschnitte auf einer der Geraden wie die entsprechenden Abschnitte auf den Parallelen verhalten, *dann* sind p und q parallel.

Die Umkehrung des zweiten Strahlensatzes

Wenn zwei sich schneidende Geraden a und b von zwei Geraden p und q geschnitten werden und sich die vom Schnittpunkt aus gemessenen Abschnitte auf einer der Geraden wie die entsprechenden Abschnitte auf den Parallelen verhalten, *dann* sind p und q parallel.

Die Umkehrung des zweiten Strahlensatzes ist nicht gültig.

Die Umkehrung des dritten Strahlensatzes

Wenn drei sich schneidende Geraden a, b und c von zwei Geraden p und q geschnitten werden und sich die Abschnitte auf der Geraden p wie die entsprechenden Abschnitte auf der Geraden q verhalten, *dann* sind p und q parallel.

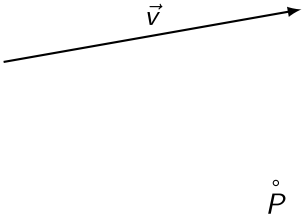
Die Umkehrung des dritten Strahlensatzes

Wenn drei sich schneidende Geraden a, b und c von zwei Geraden p und q geschnitten werden und sich die Abschnitte auf der Geraden p wie die entsprechenden Abschnitte auf der Geraden q verhalten, *dann* sind p und q parallel.

Die Umkehrung des dritten Strahlensatzes ist gültig.

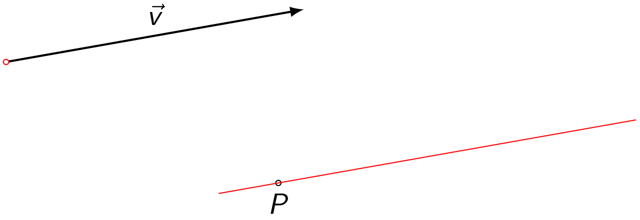
Die Translation

Eine Translation $T_{\vec{v}}$ mit dem Vektor $\vec{v}$ ist eine Abbildung der Ebene (des Raumes) auf sich selbst, die jedem Punkt P einen Punkt P' zuordnet, so dass $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$.



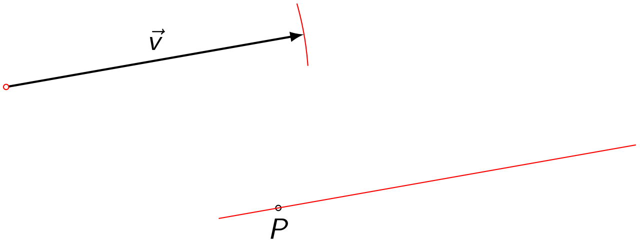
Die Translation

Eine Translation $T_{\vec{v}}$ mit dem Vektor $\vec{v}$ ist eine Abbildung der Ebene (des Raumes) auf sich selbst, die jedem Punkt P einen Punkt P' zuordnet, so dass $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$.



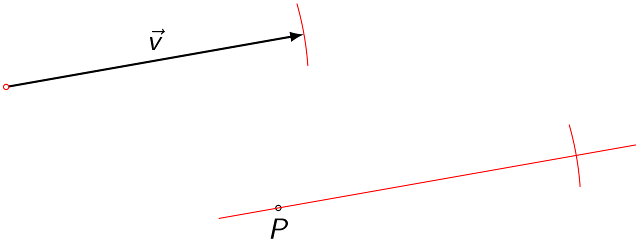
Die Translation

Eine Translation $T_{\vec{v}}$ mit dem Vektor $\vec{v}$ ist eine Abbildung der Ebene (des Raumes) auf sich selbst, die jedem Punkt P einen Punkt P' zuordnet, so dass $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$.



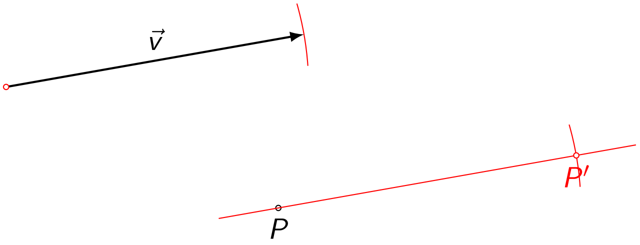
Die Translation

Eine Translation $T_{\vec{v}}$ mit dem Vektor $\vec{v}$ ist eine Abbildung der Ebene (des Raumes) auf sich selbst, die jedem Punkt P einen Punkt P' zuordnet, so dass $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$.

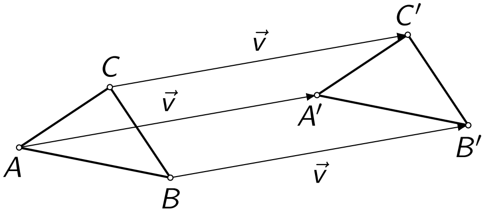


Die Translation

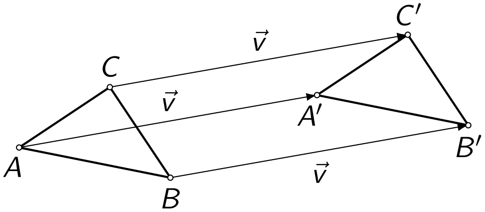
Eine Translation $T_{\vec{v}}$ mit dem Vektor $\vec{v}$ ist eine Abbildung der Ebene (des Raumes) auf sich selbst, die jedem Punkt P einen Punkt P' zuordnet, so dass $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$.



Eigenschaften der Translation $T_{\vec{v}}$

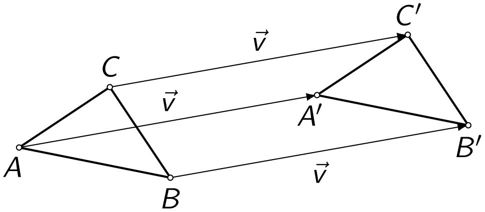


Eigenschaften der Translation $T_{\vec{v}}$



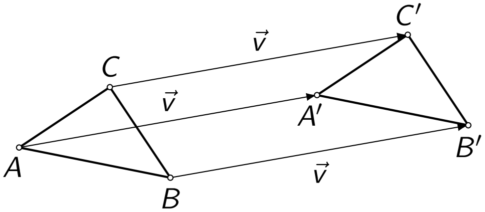
- geradentreu

Eigenschaften der Translation $T_{\vec{v}}$



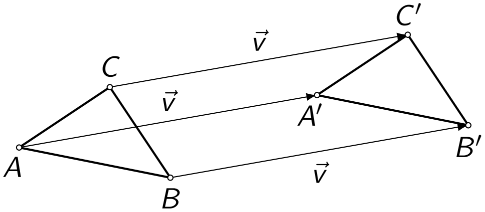
- geradentreu
- längentreu

Eigenschaften der Translation $T_{\vec{v}}$



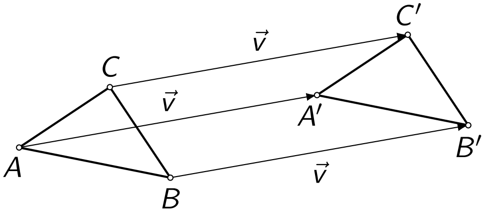
- geradentreu
- längentreu
- winkeltreu

Eigenschaften der Translation $T_{\vec{v}}$



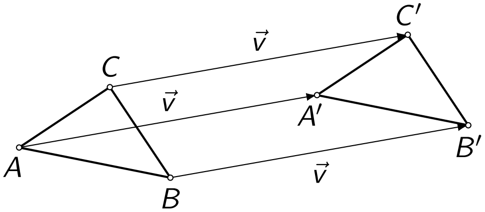
- geradentreu
- längentreu
- winkeltreu
- orientierungstreu

Eigenschaften der Translation $T_{\vec{v}}$



- geradentreu
- längentreu
- winkeltreu
- orientierungstreu
- kein Fixpunkt, wenn $\vec{v} \neq \vec{0}$

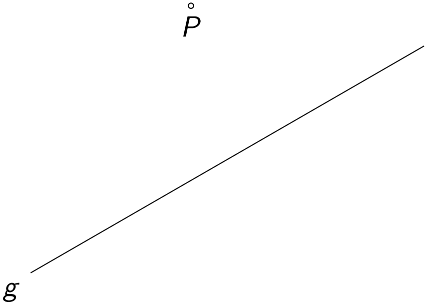
Eigenschaften der Translation $T_{\vec{v}}$



- geradentreu
- längentreu
- winkeltreu
- orientierungstreu
- kein Fixpunkt, wenn $\vec{v} \neq \vec{0}$
- Umkehrabbildung: $T_{-\vec{v}}$

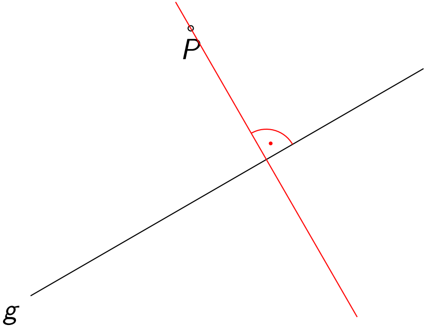
Die Achsenspiegelung

Eine Achsenspiegelung A_g an der Achse g ist eine Abbildung der Ebene (des Raumes) auf sich selbst, die jedem Punkt P einen Punkt P' zuordnet, so dass $|Pg| = |P'g|$ und $PP' \perp g$.



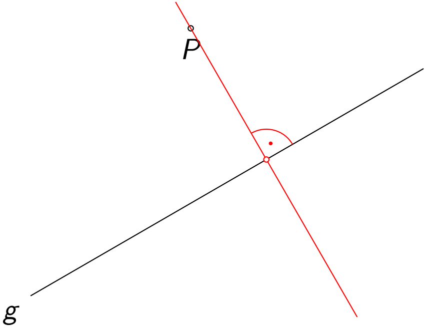
Die Achsenspiegelung

Eine Achsenspiegelung A_g an der Achse g ist eine Abbildung der Ebene (des Raumes) auf sich selbst, die jedem Punkt P einen Punkt P' zuordnet, so dass $|Pg| = |P'g|$ und $PP' \perp g$.



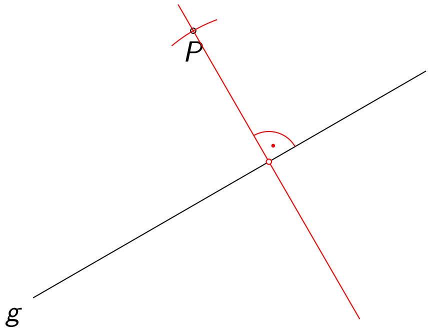
Die Achsenspiegelung

Eine Achsenspiegelung A_g an der Achse g ist eine Abbildung der Ebene (des Raumes) auf sich selbst, die jedem Punkt P einen Punkt P' zuordnet, so dass $|Pg| = |P'g|$ und $PP' \perp g$.



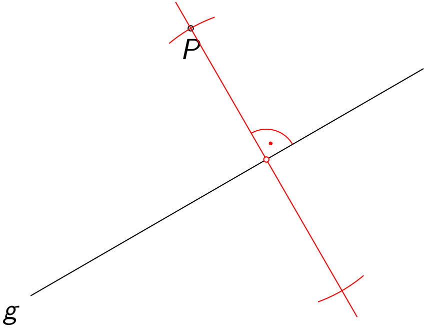
Die Achsenspiegelung

Eine Achsenspiegelung A_g an der Achse g ist eine Abbildung der Ebene (des Raumes) auf sich selbst, die jedem Punkt P einen Punkt P' zuordnet, so dass $|Pg| = |P'g|$ und $PP' \perp g$.



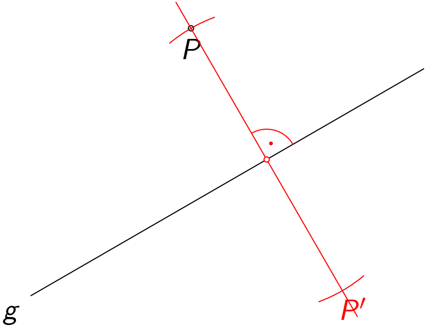
Die Achsenspiegelung

Eine Achsenspiegelung A_g an der Achse g ist eine Abbildung der Ebene (des Raumes) auf sich selbst, die jedem Punkt P einen Punkt P' zuordnet, so dass $|Pg| = |P'g|$ und $PP' \perp g$.

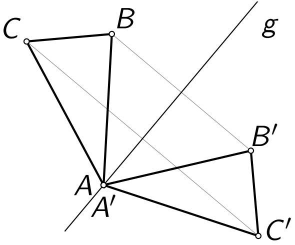


Die Achsenspiegelung

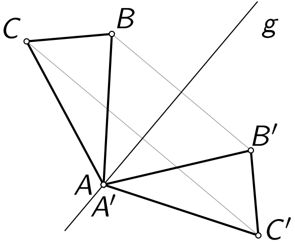
Eine Achsenspiegelung A_g an der Achse g ist eine Abbildung der Ebene (des Raumes) auf sich selbst, die jedem Punkt P einen Punkt P' zuordnet, so dass $|Pg| = |P'g|$ und $PP' \perp g$.



Eigenschaften der Achsenspiegelung A_g

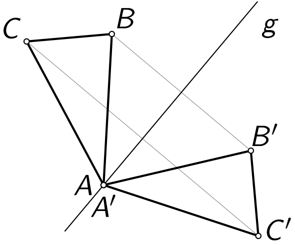


Eigenschaften der Achsenspiegelung A_g



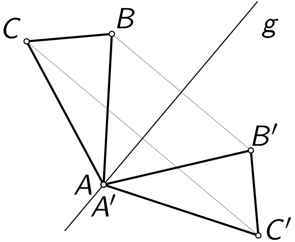
- geradentreu

Eigenschaften der Achsenspiegelung A_g



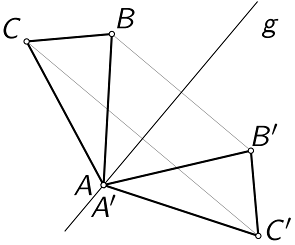
- geradentreu
- längentreu

Eigenschaften der Achsenspiegelung A_g



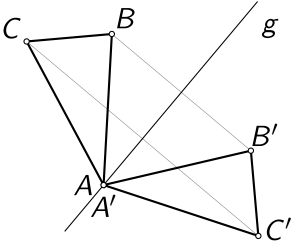
- geradentreu
- längentreu
- winkeltreu

Eigenschaften der Achsenspiegelung A_g



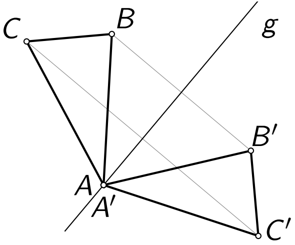
- geradentreu
- längentreu
- winkeltreu
- g ist Fix*punkt*gerade

Eigenschaften der Achsenspiegelung A_g



- geradentreu
- längentreu
- winkeltreu
- g ist Fix*punkt*gerade
- Jede Gerade $h \perp g$ ist Fixgerade.

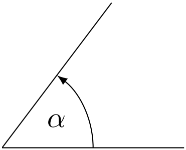
Eigenschaften der Achsenspiegelung A_g



- geradentreu
- längentreu
- winkeltreu
- g ist Fix*punkt*gerade
- Jede Gerade $h \perp g$ ist Fixgerade.
- Umkehrabbildung: A_g (Involution)

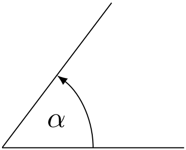
Die Rotation

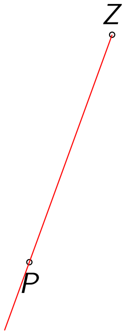
Ein Rotation $R_{Z,\alpha}$ mit Zentrum Z und Winkel α ist eine Abbildung der Ebene (des Raumes) auf sich selbst, die jedem Punkt P einen Punkt P' zuordnet, so dass $|ZP| = |ZP'|$ und $\sphericalangle(ZP, ZP') = \alpha$.



Die Rotation

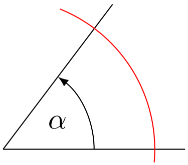
Ein Rotation $R_{Z,\alpha}$ mit Zentrum Z und Winkel α ist eine Abbildung der Ebene (des Raumes) auf sich selbst, die jedem Punkt P einen Punkt P' zuordnet, so dass $|ZP| = |ZP'|$ und $\sphericalangle(ZP, ZP') = \alpha$.

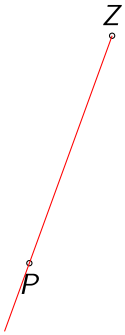




Die Rotation

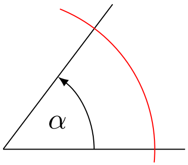
Ein Rotation $R_{Z,\alpha}$ mit Zentrum Z und Winkel α ist eine Abbildung der Ebene (des Raumes) auf sich selbst, die jedem Punkt P einen Punkt P' zuordnet, so dass $|ZP| = |ZP'|$ und $\sphericalangle(ZP, ZP') = \alpha$.

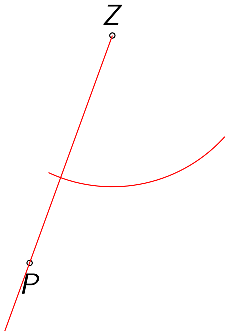




Die Rotation

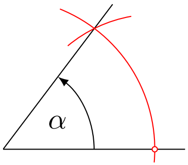
Ein Rotation $R_{Z,\alpha}$ mit Zentrum Z und Winkel α ist eine Abbildung der Ebene (des Raumes) auf sich selbst, die jedem Punkt P einen Punkt P' zuordnet, so dass $|ZP| = |ZP'|$ und $\sphericalangle(ZP, ZP') = \alpha$.

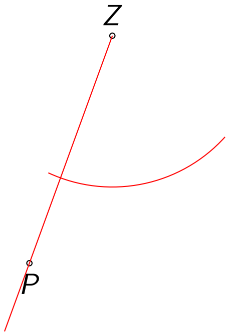




Die Rotation

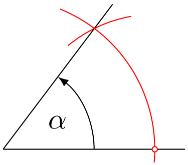
Ein Rotation $R_{Z,\alpha}$ mit Zentrum Z und Winkel α ist eine Abbildung der Ebene (des Raumes) auf sich selbst, die jedem Punkt P einen Punkt P' zuordnet, so dass $|ZP| = |ZP'|$ und $\sphericalangle(ZP, ZP') = \alpha$.

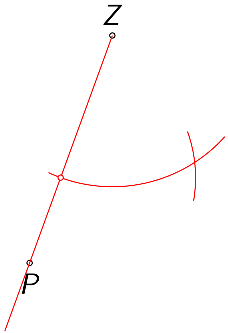




Die Rotation

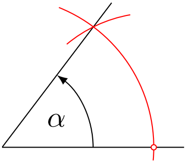
Ein Rotation $R_{Z,\alpha}$ mit Zentrum Z und Winkel α ist eine Abbildung der Ebene (des Raumes) auf sich selbst, die jedem Punkt P einen Punkt P' zuordnet, so dass $|ZP| = |ZP'|$ und $\sphericalangle(ZP, ZP') = \alpha$.

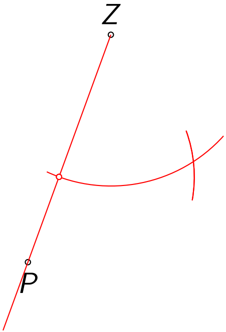




Die Rotation

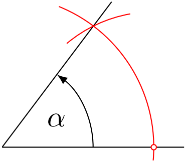
Ein Rotation $R_{Z,\alpha}$ mit Zentrum Z und Winkel α ist eine Abbildung der Ebene (des Raumes) auf sich selbst, die jedem Punkt P einen Punkt P' zuordnet, so dass $|ZP| = |ZP'|$ und $\sphericalangle(ZP, ZP') = \alpha$.

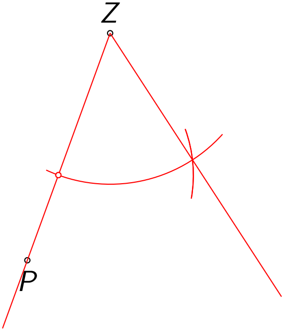




Die Rotation

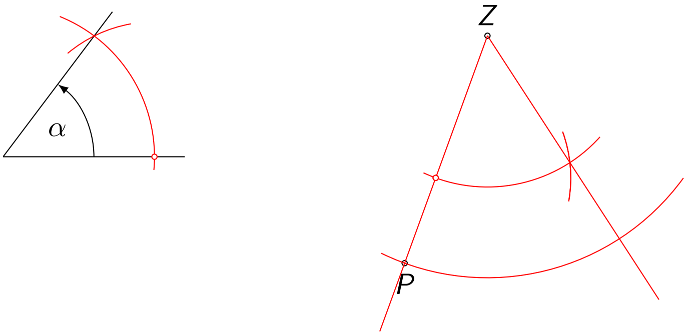
Ein Rotation $R_{Z,\alpha}$ mit Zentrum Z und Winkel α ist eine Abbildung der Ebene (des Raumes) auf sich selbst, die jedem Punkt P einen Punkt P' zuordnet, so dass $|ZP| = |ZP'|$ und $\sphericalangle(ZP, ZP') = \alpha$.





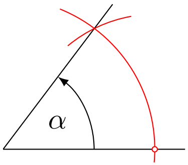
Die Rotation

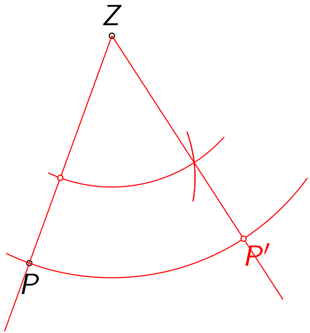
Ein Rotation $R_{Z,\alpha}$ mit Zentrum Z und Winkel α ist eine Abbildung der Ebene (des Raumes) auf sich selbst, die jedem Punkt P einen Punkt P' zuordnet, so dass $|ZP| = |ZP'|$ und $\sphericalangle(ZP, ZP') = \alpha$.



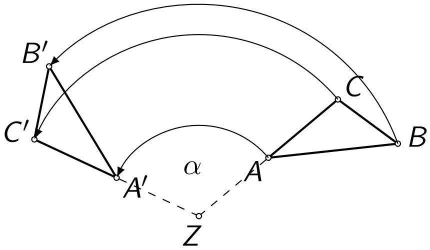
Die Rotation

Ein Rotation $R_{Z,\alpha}$ mit Zentrum Z und Winkel α ist eine Abbildung der Ebene (des Raumes) auf sich selbst, die jedem Punkt P einen Punkt P' zuordnet, so dass $|ZP| = |ZP'|$ und $\sphericalangle(ZP, ZP') = \alpha$.

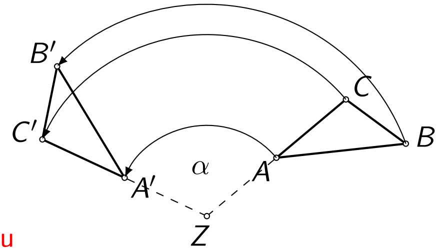




Eigenschaften der Rotation $R_{Z,\alpha}$

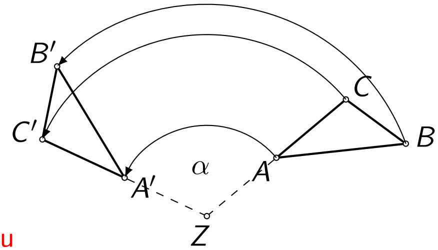


Eigenschaften der Rotation $R_{Z,\alpha}$



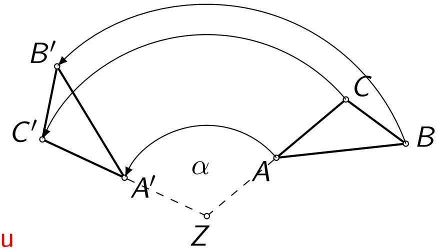
- geradentreu

Eigenschaften der Rotation $R_{Z,\alpha}$



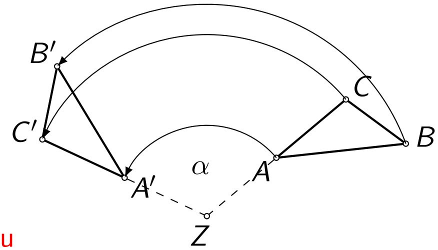
- geradentreu
- längentreu

Eigenschaften der Rotation $R_{Z,\alpha}$



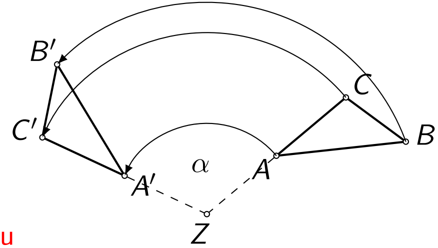
- geradentreu
- längentreu
- winkeltreu

Eigenschaften der Rotation $R_{Z,\alpha}$



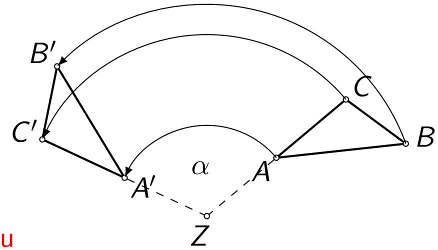
- geradentreu
- längentreu
- winkeltreu
- orientierungstreu

Eigenschaften der Rotation $R_{Z,\alpha}$



- geradentreu
- längentreu
- winkeltreu
- orientierungstreu
- Z ist einziger Fixpunkt, wenn $\alpha \neq 0°$.

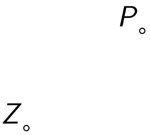
Eigenschaften der Rotation $R_{Z,\alpha}$



- geradentreu
- längentreu
- winkeltreu
- orientierungstreu
- Z ist einziger Fixpunkt, wenn $\alpha \neq 0°$.
- Umkehrabbildung: $R_{Z,-\alpha}$

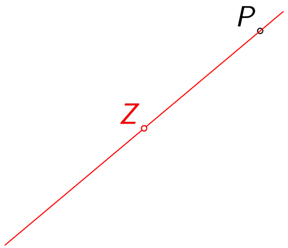
Die Punktspiegelung (Spezialfall der Rotation)

Eine Punktspiegelung P_Z am Zentrum Z ist die Rotation $R_{Z,180^\circ}$ mit dem Zentrum Z und dem Winkel 180°.



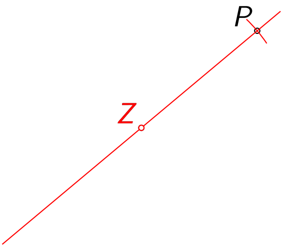
Die Punktspiegelung (Spezialfall der Rotation)

Eine Punktspiegelung P_Z am Zentrum Z ist die Rotation $R_{Z,180^\circ}$ mit dem Zentrum Z und dem Winkel 180°.



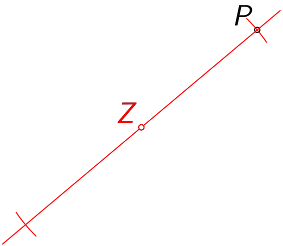
Die Punktspiegelung (Spezialfall der Rotation)

Eine Punktspiegelung P_Z am Zentrum Z ist die Rotation $R_{Z,180^\circ}$ mit dem Zentrum Z und dem Winkel 180°.



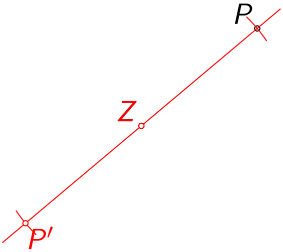
Die Punktspiegelung (Spezialfall der Rotation)

Eine Punktspiegelung P_Z am Zentrum Z ist die Rotation $R_{Z,180^\circ}$ mit dem Zentrum Z und dem Winkel 180°.

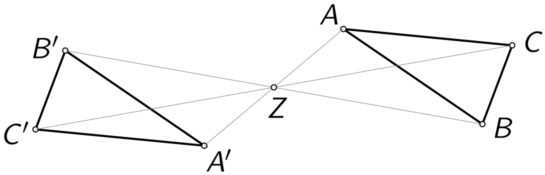


Die Punktspiegelung (Spezialfall der Rotation)

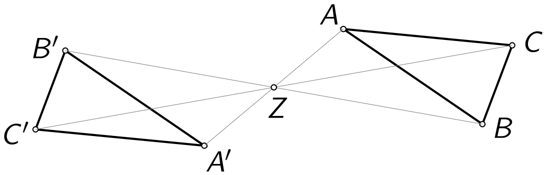
Eine Punktspiegelung P_Z am Zentrum Z ist die Rotation $R_{Z,180^\circ}$ mit dem Zentrum Z und dem Winkel 180°.



Eigenschaften der Punktspiegelung P_Z

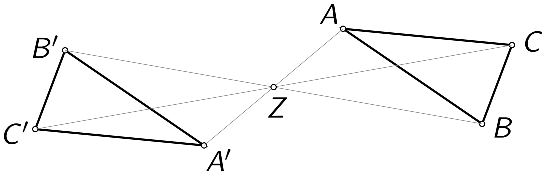


Eigenschaften der Punktspiegelung P_Z



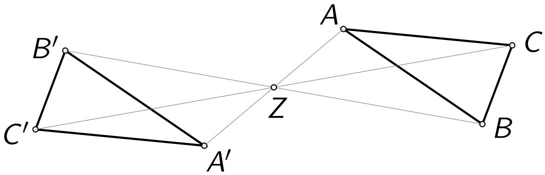
- geradentreu

Eigenschaften der Punktspiegelung P_Z



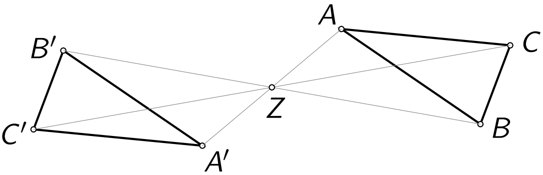
- geradentreu
- längentreu

Eigenschaften der Punktspiegelung P_Z



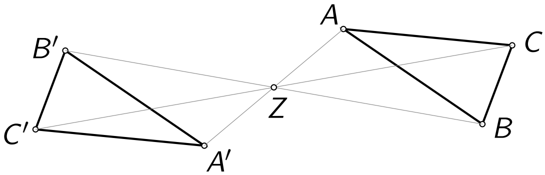
- geradentreu
- längentreu
- winkeltreu

Eigenschaften der Punktspiegelung P_Z



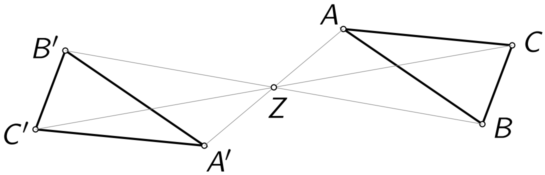
- geradentreu
- längentreu
- winkeltreu
- orientierungstreu

Eigenschaften der Punktspiegelung P_Z



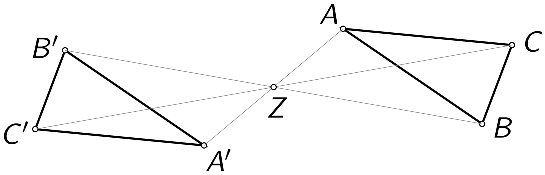
- geradentreu
- längentreu
- winkeltreu
- orientierungstreu
- Z ist einziger Fixpunkt.

Eigenschaften der Punktspiegelung P_Z



- geradentreu
- längentreu
- winkeltreu
- orientierungstreu
- Z ist einziger Fixpunkt.
- Jede Gerade g mit $Z \in g$ ist Fixgerade.

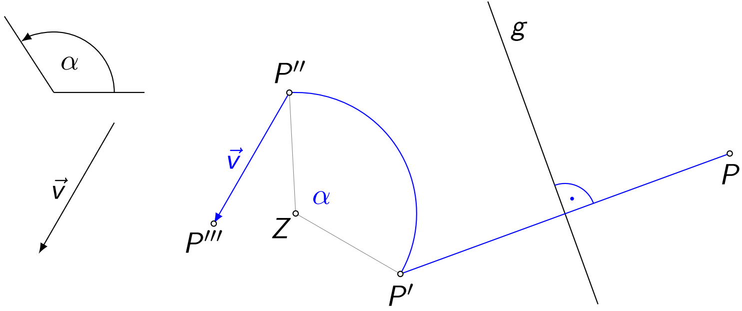
Eigenschaften der Punktspiegelung P_Z



- geradentreu
- längentreu
- winkeltreu
- orientierungstreu
- Z ist einziger Fixpunkt.
- Jede Gerade g mit $Z \in g$ ist Fixgerade.
- Umkehrabbildung: P_Z (Involution)

Kongruenzabbildungen

Eine Kongruenzabbildung besteht aus einer oder einer Verkettung mehrer der oben genannten Abbildungen. Z. B.: $T_{\vec{v}} \circ R_{Z,\alpha} \circ A_g$



Beachte: Verkettungen von Abbildungen werden von rechts nach links interpretiert.

Bemerkung

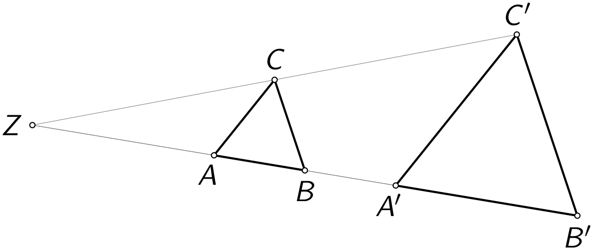
Wenn eine Figur F durch eine oder mehrere Kongruenzabbildungen auf eine Figur F' abgebildet wird, so heissen F und F' kongruent (deckungsgleich).

Kurzschreibweise: $F \cong F'$

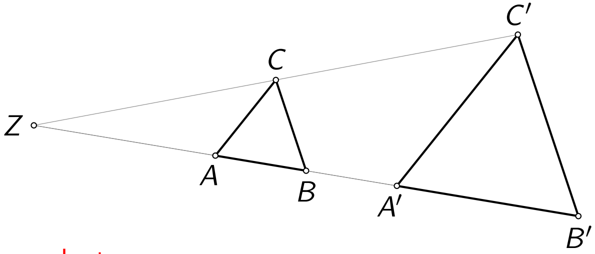
Zentrische Streckungen (Repetition)

Eine zentrische Streckung $Z_{Z,k}$ mit Zentrum Z und Streckungsfaktor $k \neq 0$ ist eine Abbildung der Ebene (des Raumes) auf sich selbst, die jedem Punkt P einen Punkt P' zuordnet, so dass $\overrightarrow{ZP'} = k \cdot \overrightarrow{ZP}$ gilt.

Eigenschaften der zentrischen Streckung $Z_{Z,k}$

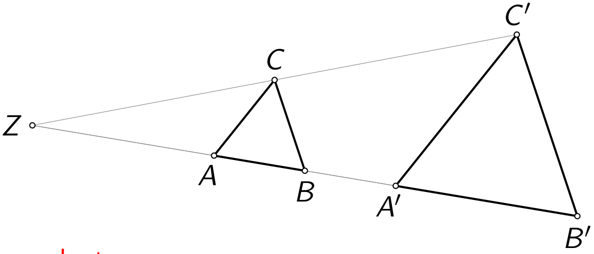


Eigenschaften der zentrischen Streckung $Z_{Z,k}$



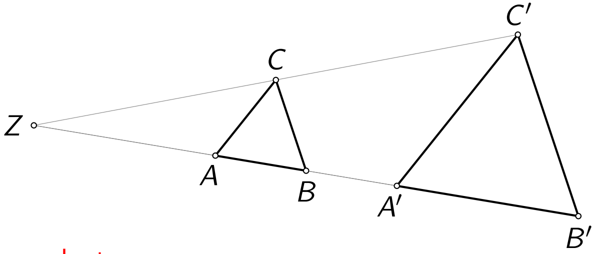
- geradentreu

Eigenschaften der zentrischen Streckung $Z_{Z,k}$



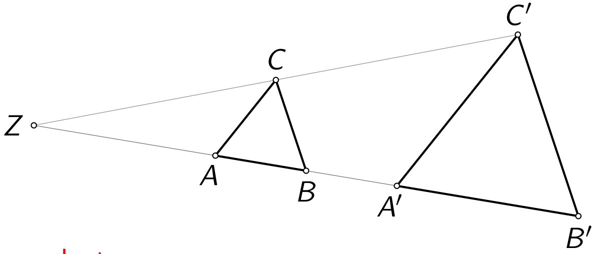
- geradentreu
- längenverhältnistreu

Eigenschaften der zentrischen Streckung $Z_{Z,k}$



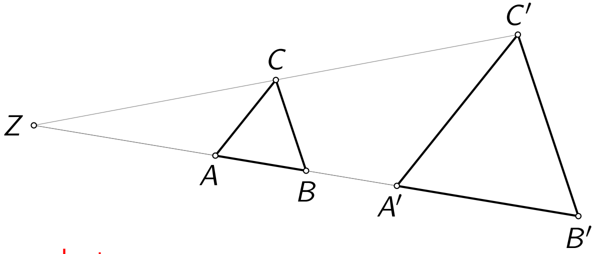
- geradentreu
- längenverhältnistreu
- winkeltreu

Eigenschaften der zentrischen Streckung $Z_{Z,k}$



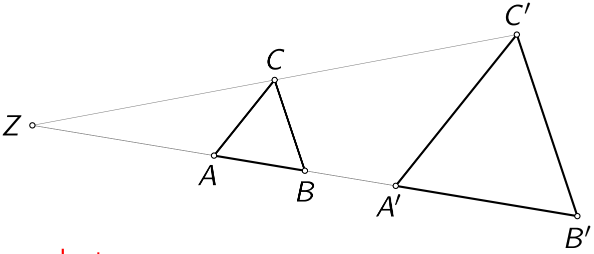
- geradentreu
- längenverhältnistreu
- winkeltreu
- orientierungstreu

Eigenschaften der zentrischen Streckung $Z_{Z,k}$



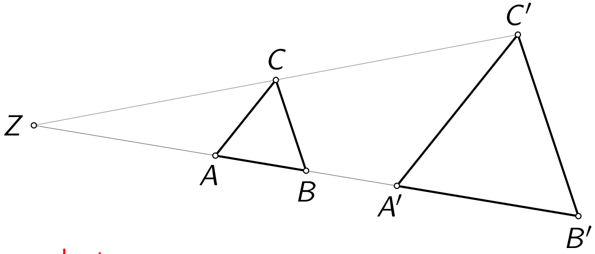
- geradentreu
- längenverhältnistreu
- winkeltreu
- orientierungstreu
- Z ist einziger Fixpunkt.

Eigenschaften der zentrischen Streckung $Z_{Z,k}$



- geradentreu
- längenverhältnistreu
- winkeltreu
- orientierungstreu
- Z ist einziger Fixpunkt.
- Jede Gerade g mit $Z \in g$ ist Fixgerade.

Eigenschaften der zentrischen Streckung $Z_{Z,k}$



- geradentreu
- längenverhältnistreu
- winkeltreu
- orientierungstreu
- Z ist einziger Fixpunkt.
- Jede Gerade g mit $Z \in g$ ist Fixgerade.
- Umkehrabbildung: $Z_{Z,\frac{1}{k}}$

Ähnlichkeitsabbildungen

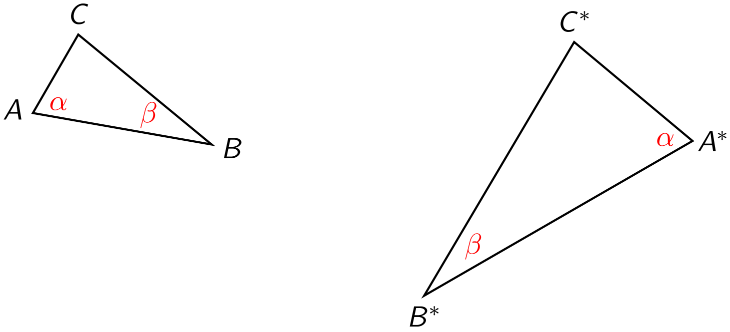
Eine Ähnlichkeitsabbildung ist eine Abbildung, die sich aus einer oder mehreren Kongruenzabbildungen und zentrischen Streckungen zusammensetzt.

Wenn eine Figur F durch eine Ähnlichkeitsabbildung auf eine Figur F' abgebildet wird, so heissen F und F' ähnlich.

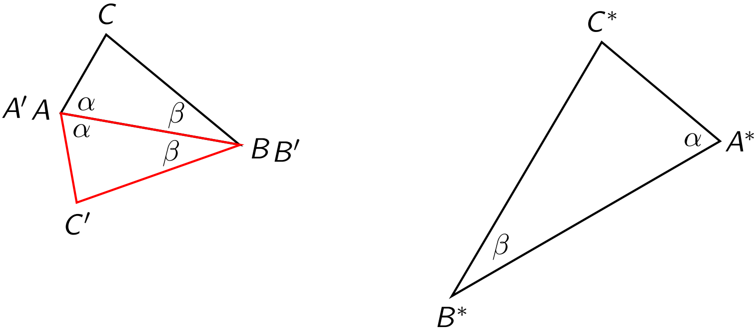
Kurzschreibweise: $F \sim F'$

Der erste Ähnlichkeitssatz für Dreiecke

Wenn zwei Dreiecke ABC und $A^*B^*C^*$ in zwei Winkeln (z. B. α und β) übereinstimmen, dann sind sie ähnlich.

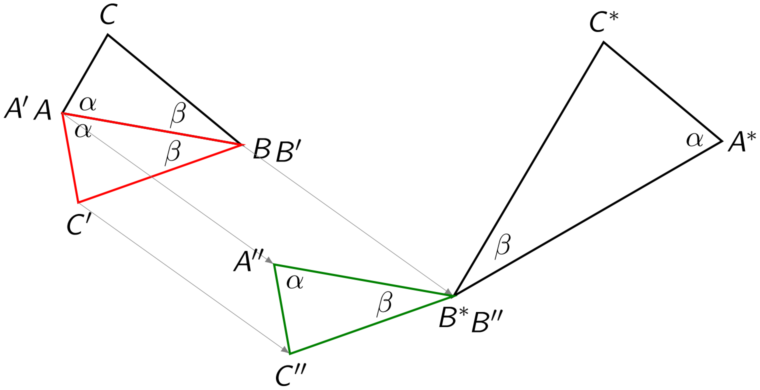


Beweis (Schritt 1)



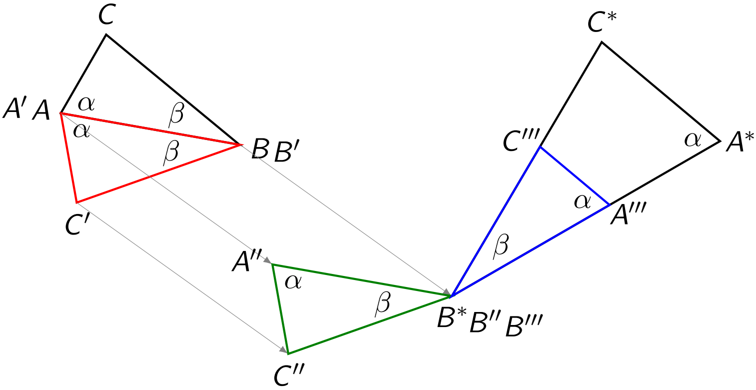
Da die Dreiecke verschieden orientiert sind, spiegeln wir das Dreieck ABC z. B. an der Seite $AB \to A'B'C'$

Beweis (Schritt 2)



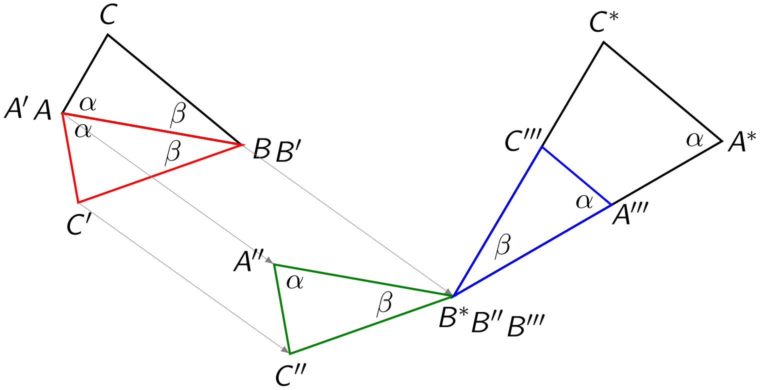
Dann führen wir mit $A'B'C'$ eine Translation z. B. um den Vektor $\overrightarrow{B'B^*}$ durch $\to A''B''C''$

Beweis (Schritt 3)



Da B auf B^* abgebildet wurde und die Winkel in B und B^* übereinstimmen, gibt es eine Drehung um B'' und dem Winkel φ, welche die Winkel zur Deckung bringt. $\rightarrow A'''B'''C'''$

Beweis (Schritt 4)



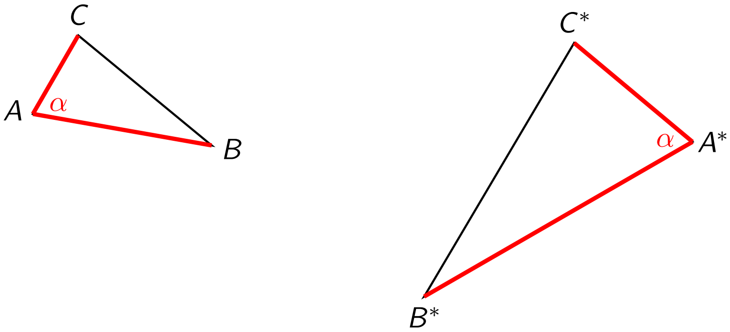
Da die Winkel in A''' und A^* übereinstimmen, gilt $A'''C''' \parallel A^*C^*$.
Also gibt es eine zentrische Streckung mit Zentrum B''' und Faktor $k = \frac{|A^*C^*|}{|A'''C'''|}$, die A''' auf A^* und C''' auf C^* abbildet. $\to A^*B^*C^*$

Da diese Überlegungen unabhängig von der speziellen Lage der Dreiecke sind, haben wir eine Ähnlichkeitsabbildung gefunden, die ABC auf $A^*B^*C^*$ abbildet.

Also sind die Dreiecke ähnlich. $\square$

Der zweite Ähnlichkeitssatz für Dreiecke

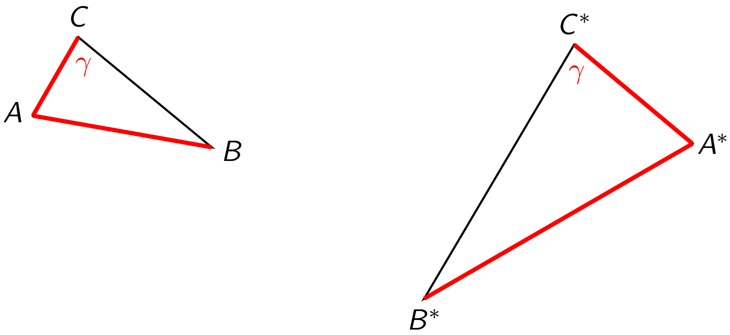
Wenn zwei Dreiecke in einem Winkel und im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten übereinstimmen, dann sind sie ähnlich.



Der Beweis verläuft ähnlich wie beim ersten Ähnlichkeitssatz.

Der dritte Ähnlichkeitssatz für Dreiecke

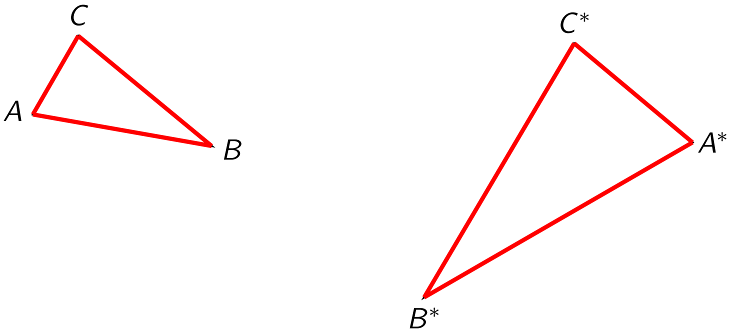
Wenn zwei Dreiecke im Verhältnis zweier Seiten und im Winkel, welcher *der längeren der beiden Seiten* gegenüberliegt, übereinstimmen, dann sind sie ähnlich.



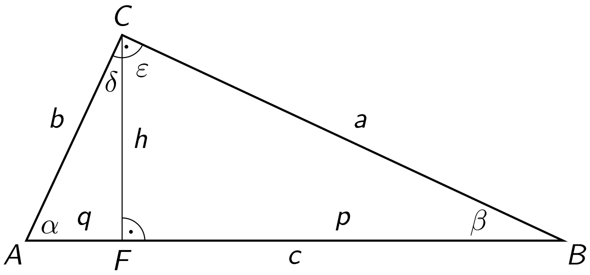
Der Beweis verläuft ähnlich wie beim ersten Ähnlichkeitssatz.

Der vierte Ähnlichkeitssatz für Dreiecke

Wenn zwei Dreiecke im Verhältnis der drei Seiten übereinstimmen, dann sind sie ähnlich.

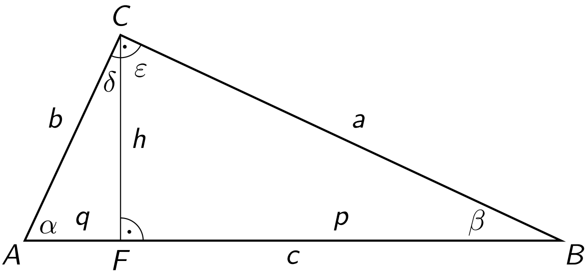


Der Beweis verläuft ähnlich wie beim ersten Ähnlichkeitssatz.



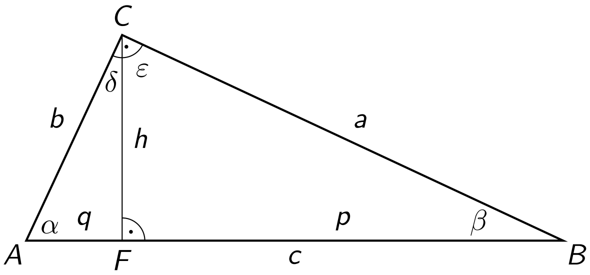
Behauptung: Die Dreiecke ABC, BCF und CAF sind ähnlich.

Beweis:



Behauptung: Die Dreiecke ABC, BCF und CAF sind ähnlich.

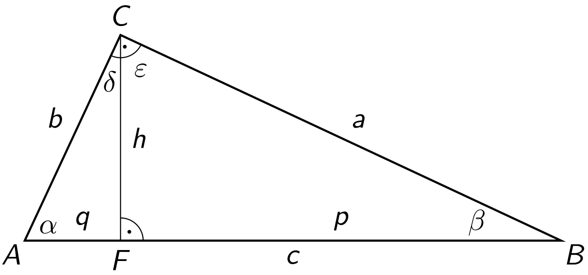
Beweis: $\alpha + \beta = 90^\circ$



Behauptung: Die Dreiecke ABC, BCF und CAF sind ähnlich.

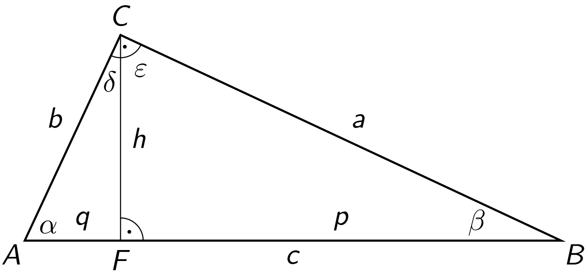
Beweis: $\alpha + \beta = 90^\circ$

$\alpha + \delta = 90^\circ$



Behauptung: Die Dreiecke ABC, BCF und CAF sind ähnlich.

Beweis:
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$
$$\alpha + \delta = 90^\circ$$
$$\beta = \delta$$

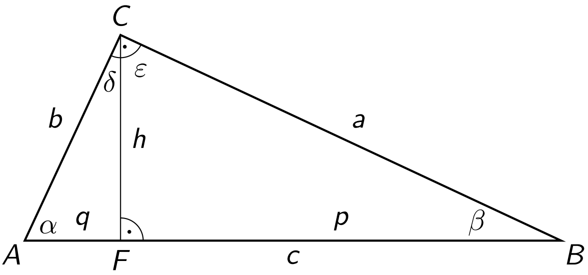


Behauptung: Die Dreiecke ABC, BCF und CAF sind ähnlich.

Beweis: $\alpha + \beta = 90^\circ$ $\qquad$ $\alpha + \beta = 90^\circ$

$$\alpha + \delta = 90^\circ$$

$$\beta = \delta$$



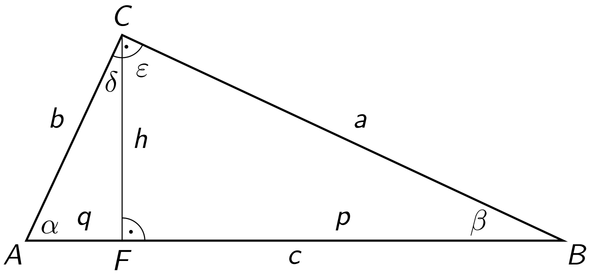
Behauptung: Die Dreiecke ABC, BCF und CAF sind ähnlich.

Beweis:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \qquad \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\alpha + \delta = 90^\circ \qquad \varepsilon + \beta = 90^\circ$$

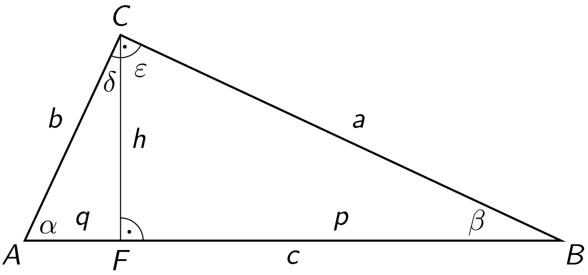
$$\beta = \delta$$



Behauptung: Die Dreiecke ABC, BCF und CAF sind ähnlich.

Beweis:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \qquad \alpha + \beta = 90^\circ$$
$$\alpha + \delta = 90^\circ \qquad \varepsilon + \beta = 90^\circ$$
$$\beta = \delta \qquad \alpha = \varepsilon$$



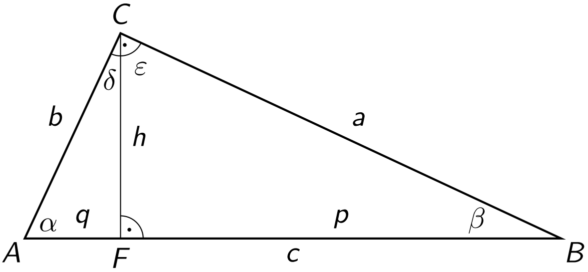
Behauptung: Die Dreiecke ABC, BCF und CAF sind ähnlich.

Beweis:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 90^\circ & \qquad \alpha + \beta &= 90^\circ \\ \alpha + \delta &= 90^\circ & \qquad \varepsilon + \beta &= 90^\circ \\ \beta &= \delta & \qquad \alpha &= \varepsilon \end{aligned}$$

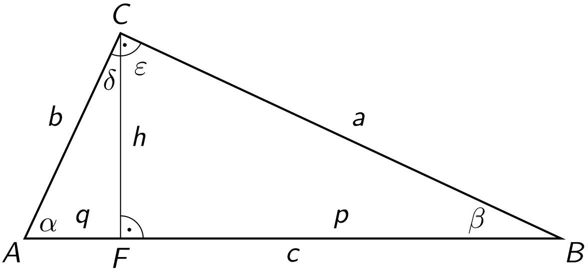
ABC, BCF und CAF stimmen jeweils in zwei Winkeln überein und sind daher ähnlich.

Der Höhensatz



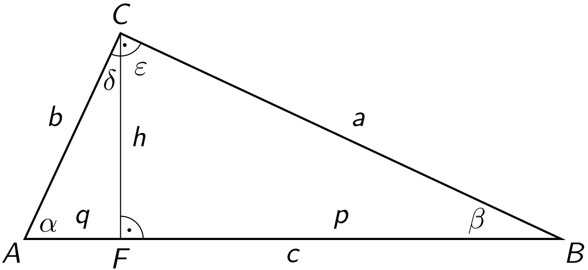
Aus $CAF \sim BCF$ folgt:

Der Höhensatz



Aus $CAF \sim BCF$ folgt: $h : q = p : h$

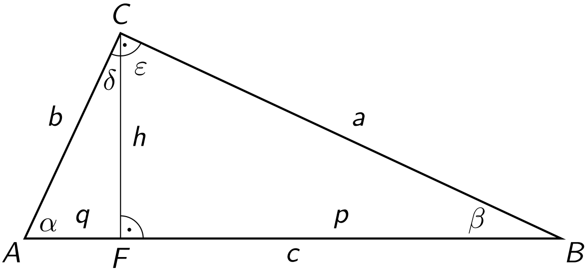
Der Höhensatz



Aus $CAF \sim BCF$ folgt: $h : q = p : h$

$$h^2 = p \cdot q$$ Höhensatz

Der Höhensatz

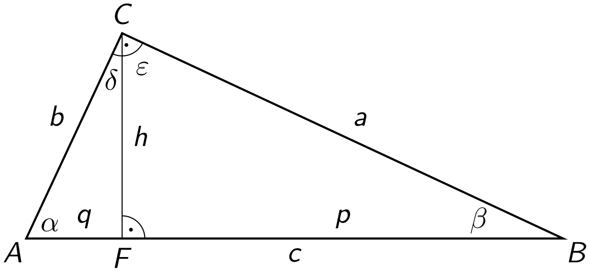


Aus $CAF \sim BCF$ folgt: $h : q = p : h$

$$h^2 = p \cdot q \qquad \text{Höhensatz}$$

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe flächengleich dem Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten.

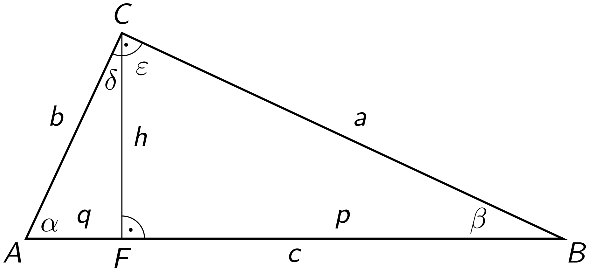
Der Satz des Euklid (Kathetensätze)



Aus $CAF \sim ABC$ folgt:

Aus $BCF \sim ABC$ folgt:

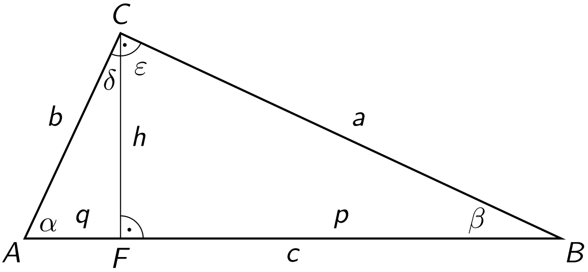
Der Satz des Euklid (Kathetensätze)



Aus $CAF \sim ABC$ folgt: $b : q = c : b$

Aus $BCF \sim ABC$ folgt:

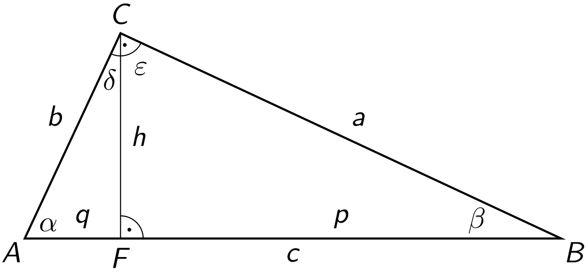
Der Satz des Euklid (Kathetensätze)



Aus $CAF \sim ABC$ folgt: $b : q = c : b \quad \Rightarrow \quad b^2 = q \cdot c$

Aus $BCF \sim ABC$ folgt:

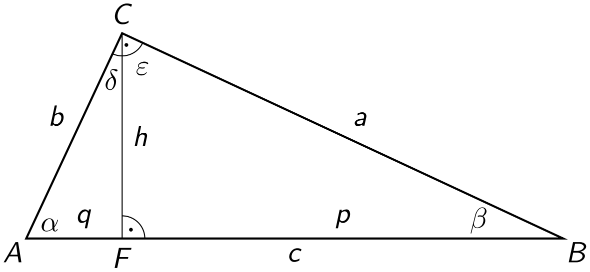
Der Satz des Euklid (Kathetensätze)



Aus $CAF \sim ABC$ folgt: $b : q = c : b \quad \Rightarrow \quad b^2 = q \cdot c$

Aus $BCF \sim ABC$ folgt: $a : p = c : a$

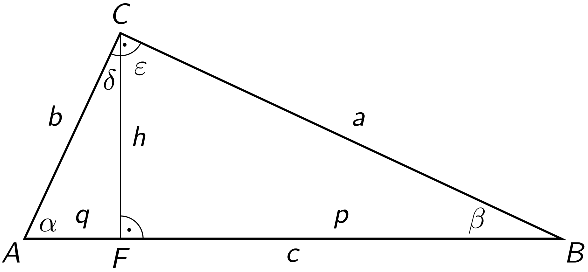
Der Satz des Euklid (Kathetensätze)



Aus $CAF \sim ABC$ folgt: $b : q = c : b \quad \Rightarrow \quad b^2 = q \cdot c$

Aus $BCF \sim ABC$ folgt: $a : p = c : a \quad \Rightarrow \quad a^2 = p \cdot c$

Der Satz des Euklid (Kathetensätze)

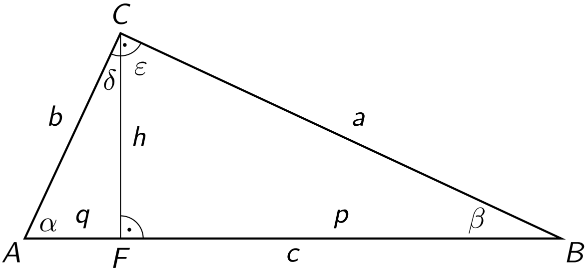


Aus $CAF \sim ABC$ folgt: $b : q = c : b \quad \Rightarrow \quad b^2 = q \cdot c$

Aus $BCF \sim ABC$ folgt: $a : p = c : a \quad \Rightarrow \quad a^2 = p \cdot c$

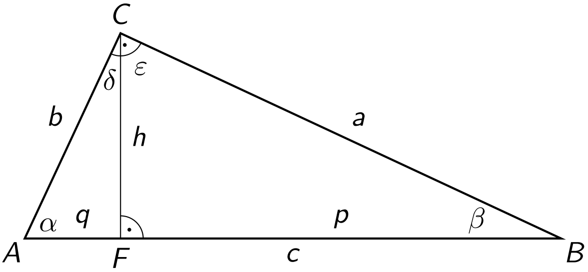
Im rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über einer Kathete den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Kathetenabschnitt.

Der Satz des Pythagoras



... folgt direkt aus den Kathetensätzen:

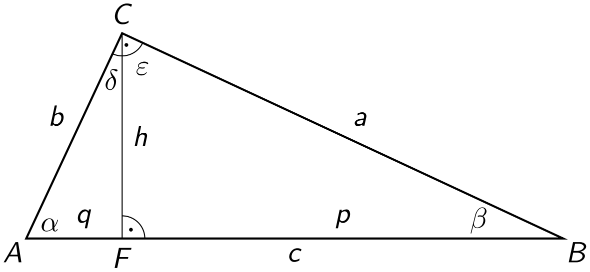
Der Satz des Pythagoras



... folgt direkt aus den Kathetensätzen:

$a^2 + b^2 =$

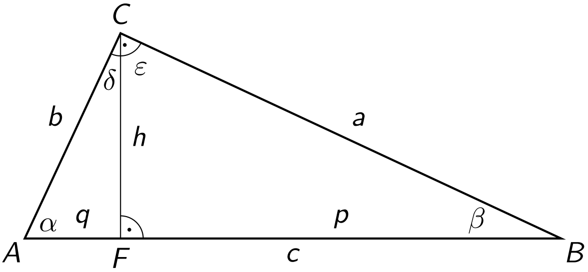
Der Satz des Pythagoras



... folgt direkt aus den Kathetensätzen:

$a^2 + b^2 = p \cdot c + q \cdot c =$

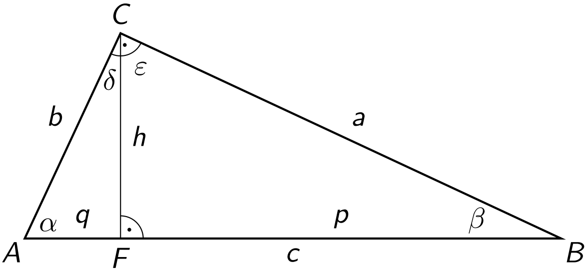
Der Satz des Pythagoras



... folgt direkt aus den Kathetensätzen:

$a^2 + b^2 = p \cdot c + q \cdot c = (p + q) \cdot c =$

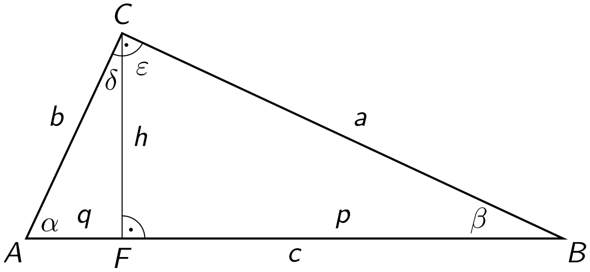
Der Satz des Pythagoras



... folgt direkt aus den Kathetensätzen:

$$a^2 + b^2 = p \cdot c + q \cdot c = (p + q) \cdot c = c \cdot c =$$

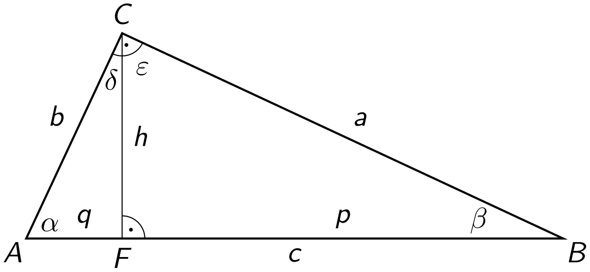
Der Satz des Pythagoras



... folgt direkt aus den Kathetensätzen:

$$a^2 + b^2 = p \cdot c + q \cdot c = (p + q) \cdot c = c \cdot c = c^2$$

Der Satz des Pythagoras



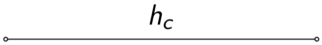
... folgt direkt aus den Kathetensätzen:

$$a^2 + b^2 = p \cdot c + q \cdot c = (p + q) \cdot c = c \cdot c = c^2$$

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der beiden Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadates.

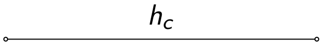
Beispiel 3.5.1

Konstruiere ein Dreieck ABC mit dem Seitenlängenverhältnis $a : b : c = 4 : 3 : 5$ und der Höhe h_c.



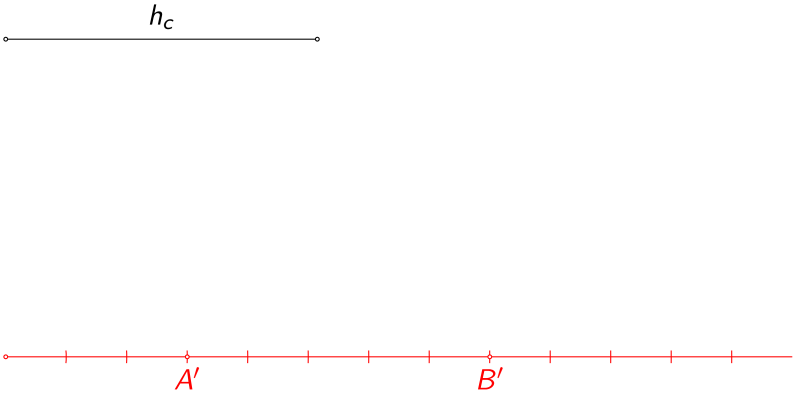
Beispiel 3.5.1

Konstruiere ein Dreieck ABC mit dem Seitenlängenverhältnis $a : b : c = 4 : 3 : 5$ und der Höhe h_c.



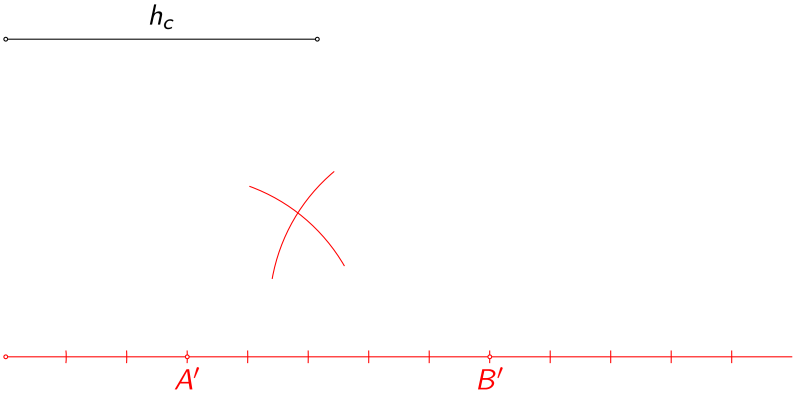
Beispiel 3.5.1

Konstruiere ein Dreieck ABC mit dem Seitenlängenverhältnis $a : b : c = 4 : 3 : 5$ und der Höhe h_c.



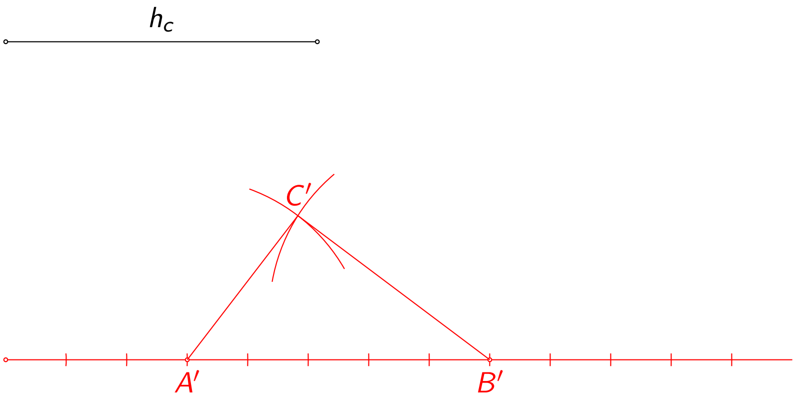
Beispiel 3.5.1

Konstruiere ein Dreieck ABC mit dem Seitenlängenverhältnis $a : b : c = 4 : 3 : 5$ und der Höhe h_c.



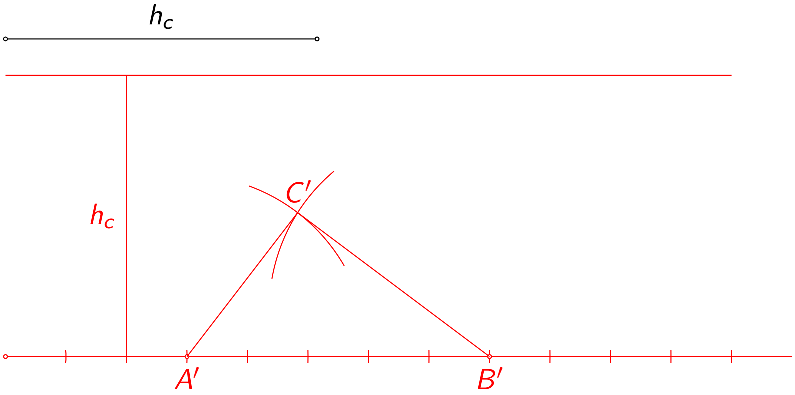
Beispiel 3.5.1

Konstruiere ein Dreieck ABC mit dem Seitenlängenverhältnis $a : b : c = 4 : 3 : 5$ und der Höhe h_c.



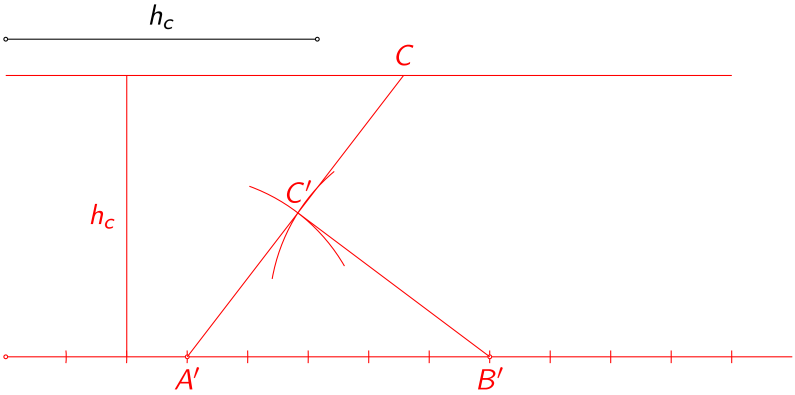
Beispiel 3.5.1

Konstruiere ein Dreieck ABC mit dem Seitenlängenverhältnis $a : b : c = 4 : 3 : 5$ und der Höhe h_c.



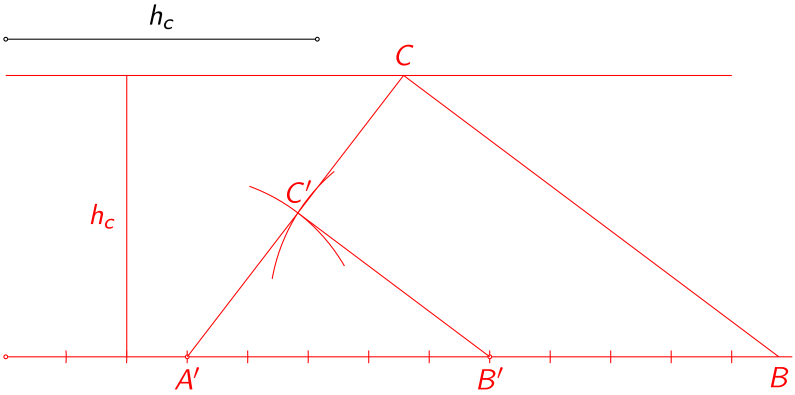
Beispiel 3.5.1

Konstruiere ein Dreieck ABC mit dem Seitenlängenverhältnis $a : b : c = 4 : 3 : 5$ und der Höhe h_c.



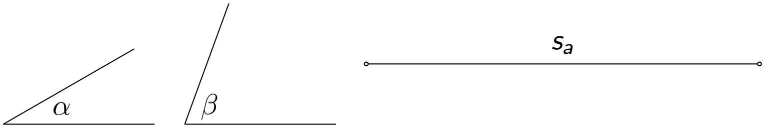
Beispiel 3.5.1

Konstruiere ein Dreieck ABC mit dem Seitenlängenverhältnis $a : b : c = 4 : 3 : 5$ und der Höhe h_c.



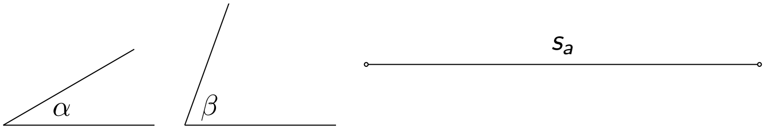
Beispiel 3.5.2

Konstruiere ein Dreieck ABC aus den Winkeln α, β und der Schwerlinie s_a.



Beispiel 3.5.2

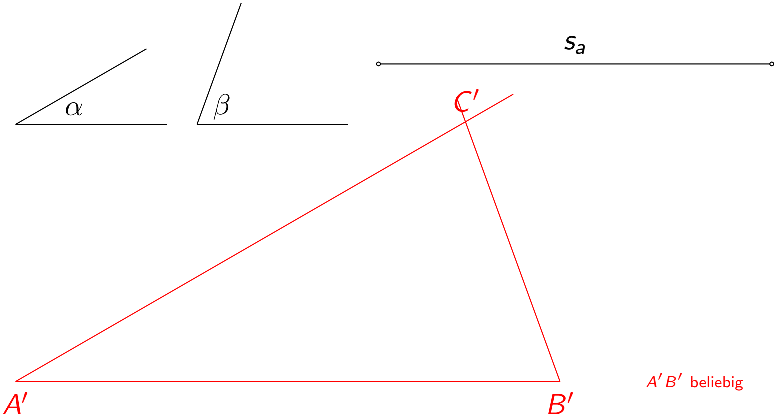
Konstruiere ein Dreieck ABC aus den Winkeln α, β und der Schwerlinie s_a.



$A'B'$ beliebig

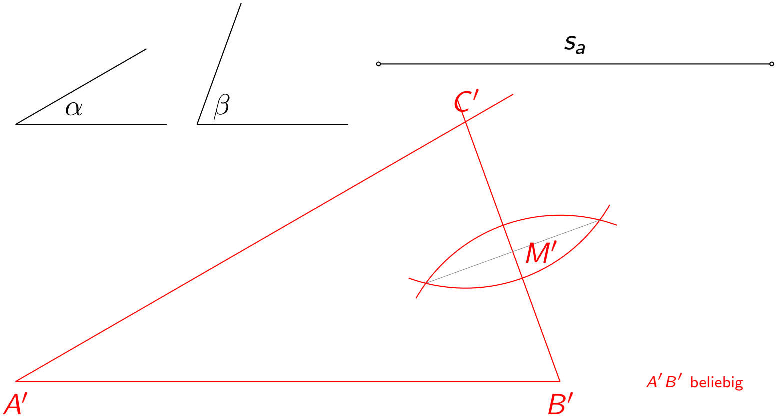
Beispiel 3.5.2

Konstruiere ein Dreieck ABC aus den Winkeln α, β und der Schwerlinie s_a.



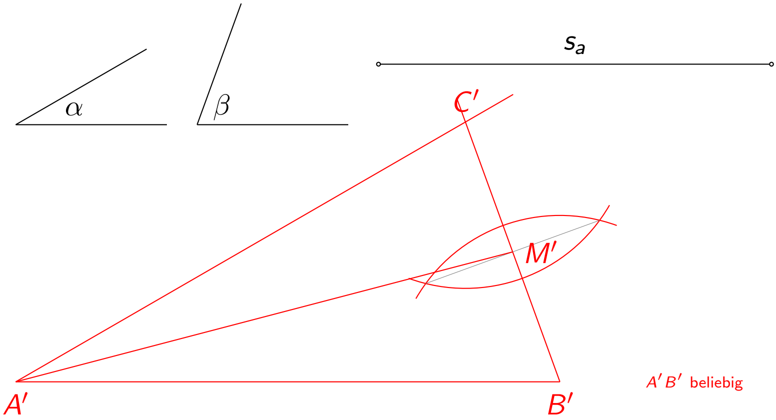
Beispiel 3.5.2

Konstruiere ein Dreieck ABC aus den Winkeln α, β und der Schwerlinie s_a.



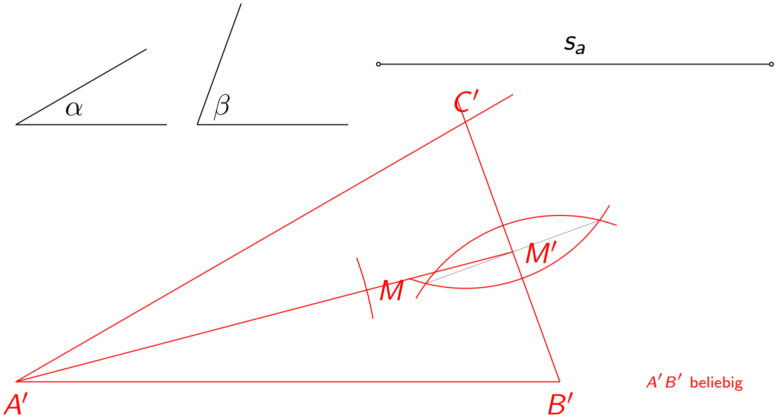
Beispiel 3.5.2

Konstruiere ein Dreieck ABC aus den Winkeln α, β und der Schwerlinie s_a.



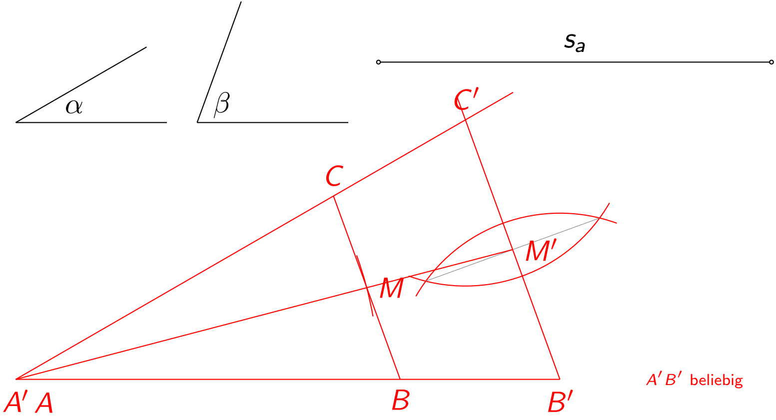
Beispiel 3.5.2

Konstruiere ein Dreieck ABC aus den Winkeln α, β und der Schwerlinie s_a.



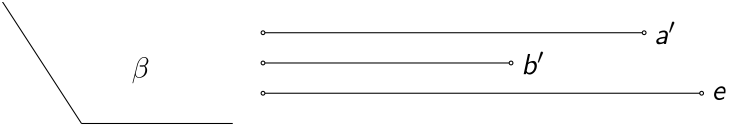
Beispiel 3.5.2

Konstruiere ein Dreieck ABC aus den Winkeln α, β und der Schwerlinie s_a.



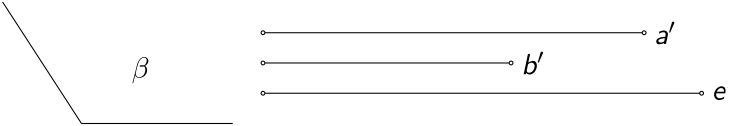
Beispiel 3.5.3

Konstruiere ein Rhomboid mit dem Seitenverhältnis $a : b = a' : b'$ dem Winkel β und der Diagonalen $e = AC$.



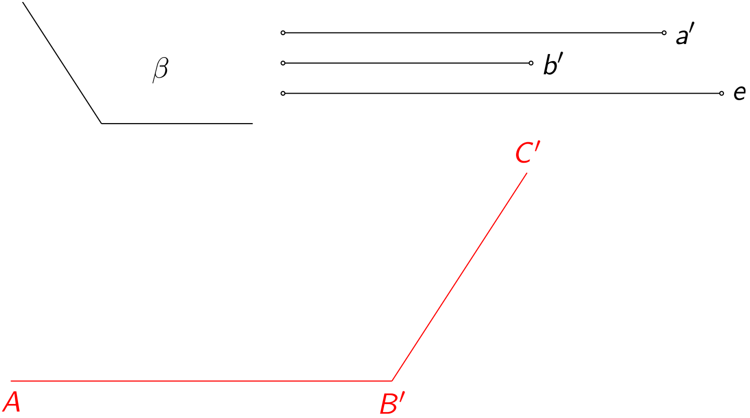
Beispiel 3.5.3

Konstruiere ein Rhomboid mit dem Seitenverhältnis $a : b = a' : b'$ dem Winkel β und der Diagonalen $e = AC$.



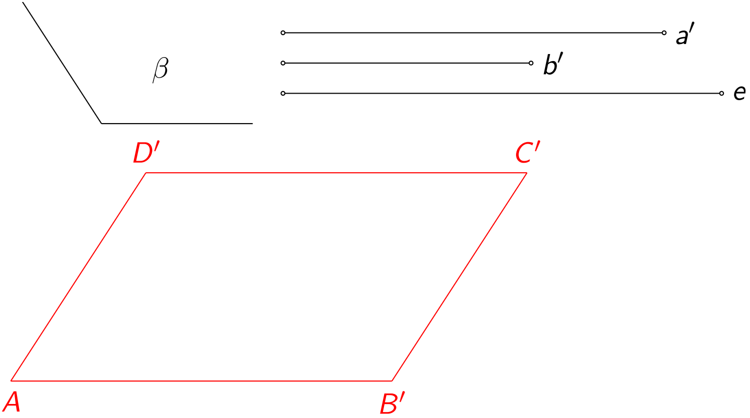
Beispiel 3.5.3

Konstruiere ein Rhomboid mit dem Seitenverhältnis $a : b = a' : b'$ dem Winkel β und der Diagonalen $e = AC$.



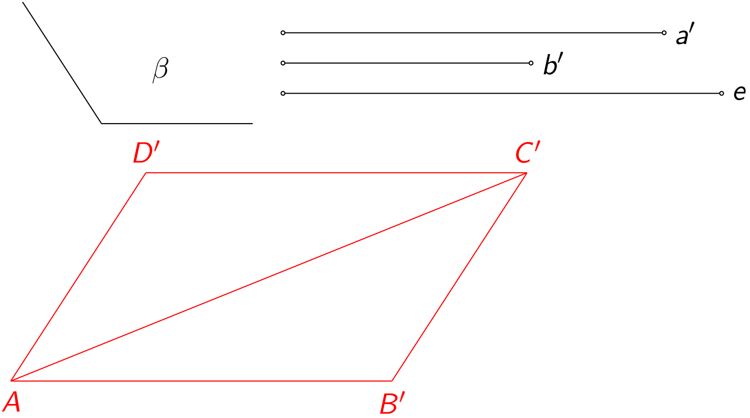
Beispiel 3.5.3

Konstruiere ein Rhomboid mit dem Seitenverhältnis $a : b = a' : b'$ dem Winkel β und der Diagonalen $e = AC$.



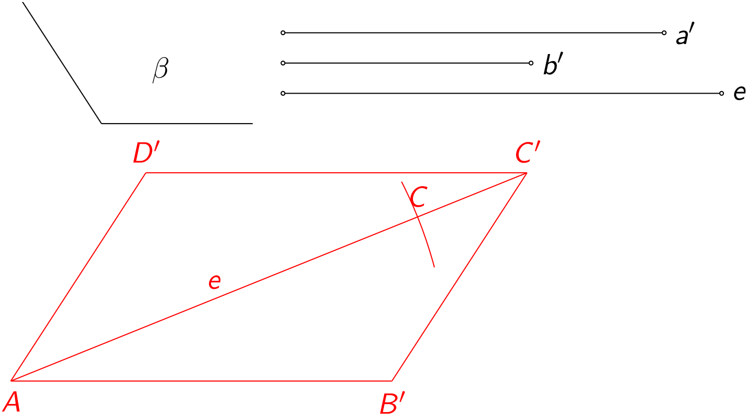
Beispiel 3.5.3

Konstruiere ein Rhomboid mit dem Seitenverhältnis $a : b = a' : b'$ dem Winkel β und der Diagonalen $e = AC$.



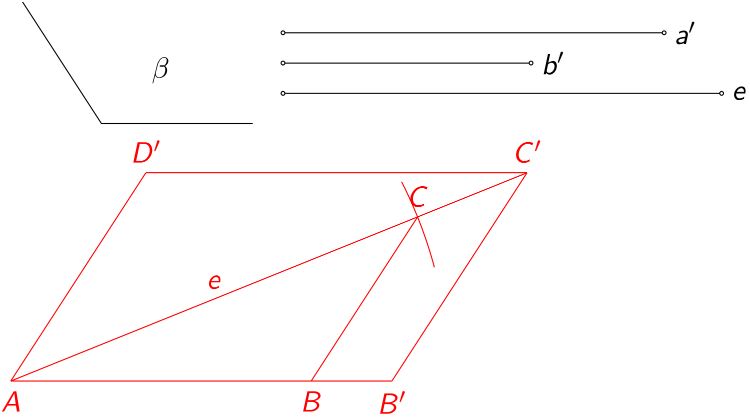
Beispiel 3.5.3

Konstruiere ein Rhomboid mit dem Seitenverhältnis $a : b = a' : b'$ dem Winkel β und der Diagonalen $e = AC$.



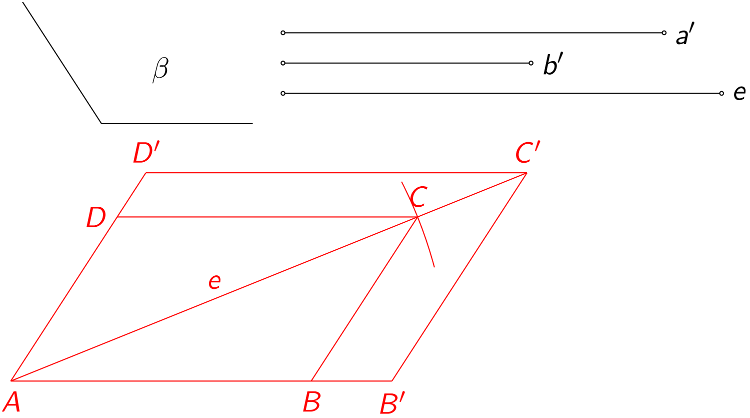
Beispiel 3.5.3

Konstruiere ein Rhomboid mit dem Seitenverhältnis $a : b = a' : b'$ dem Winkel β und der Diagonalen $e = AC$.



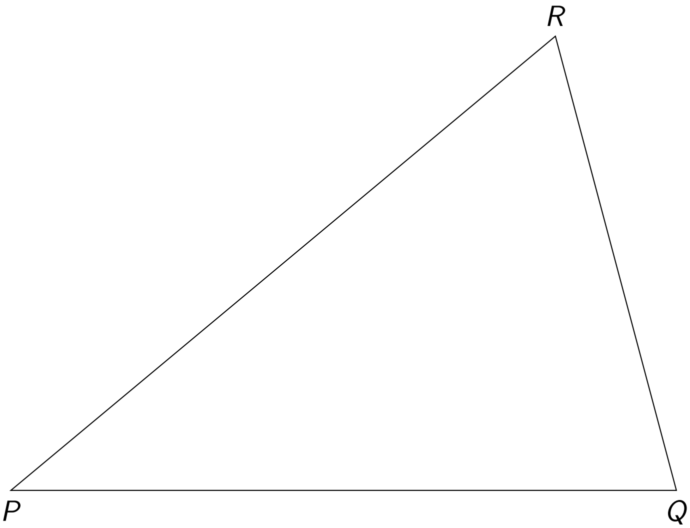
Beispiel 3.5.3

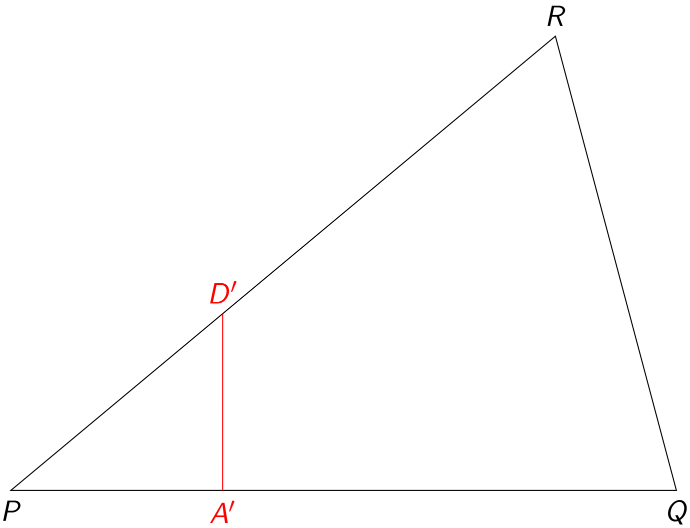
Konstruiere ein Rhomboid mit dem Seitenverhältnis $a : b = a' : b'$ dem Winkel β und der Diagonalen $e = AC$.

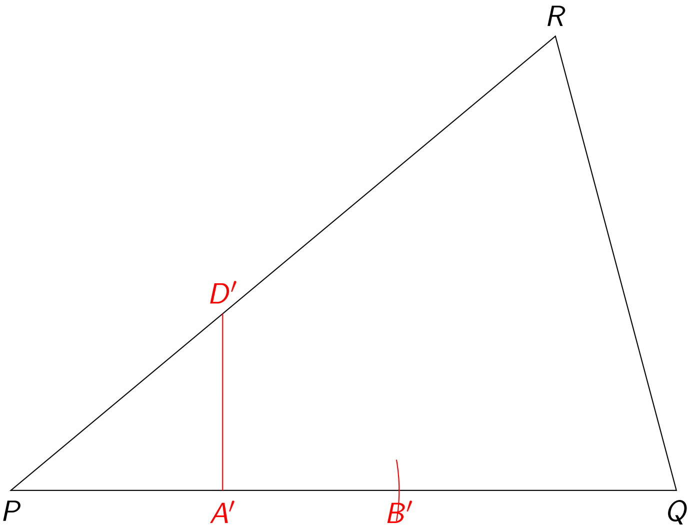


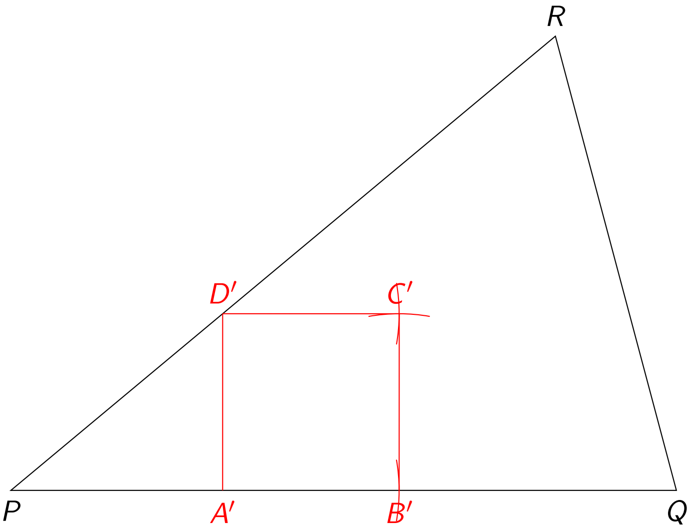
Beispiel 3.5.4

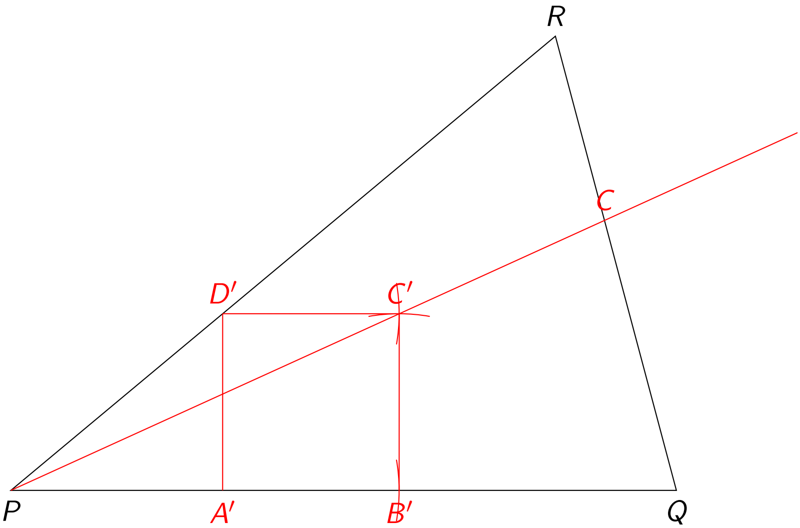
Dem Dreieck PQR ist ein Quadrat $ABCD$ so einzuschreiben, dass zwei Ecken des Quadrates auf der Seite PQ und die anderen auf den Seiten PR und QR liegen.

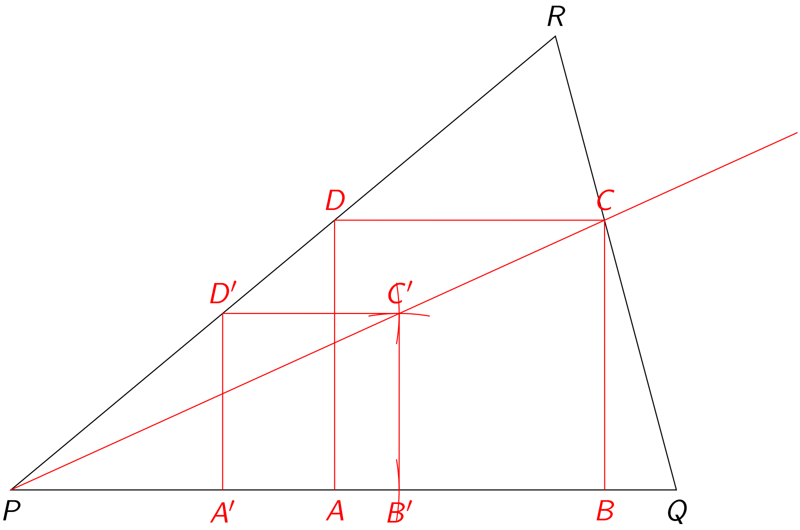

R
P
Q


R
D'
P
A'
Q

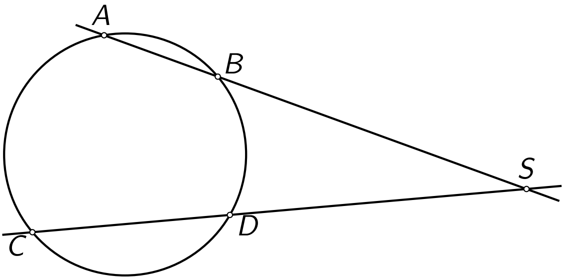

R
D′
P
A′
B′
Q


R
D′
C′
P
A′
B′
Q


R
C
D′
C′
P
A′
B′
Q


R
D
C
D′
C′
P
A′
A
B′
B
Q

Der Sekantensatz



Schneiden sich zwei Sekanten ausserhalb des Kreises, so ist das Produkt aus den vom Schnittpunkt aus gemessenen Abschnitten der einen Sekante gleich dem Produkt der vom Schnittpunkt aus gemessenen Abschnitte der anderen Sekante.

Beweis

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle DCB$ (Fasskreisbogen über $\overparen{BD}$)

Beweis

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle DCB$ (Fasskreisbogen über $\overset{\frown}{BD}$)

$\Delta SAD \sim \Delta SBC$ (zwei gleiche Winkel)

Beweis

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle DCB$ (Fasskreisbogen über $\overset{\frown}{BD}$)

$\Delta SAD \sim \Delta SBC$ (zwei gleiche Winkel)

$|SA| : |SD| = |SC| : |SB|$

Beweis

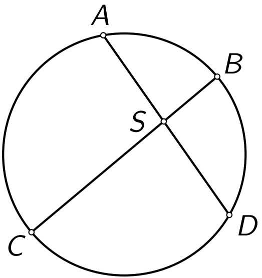
$\sphericalangle BAD = \sphericalangle DCB$ (Fasskreisbogen über $\overset{\frown}{BD}$)

$\Delta SAD \sim \Delta SBC$ (zwei gleiche Winkel)

$|SA| : |SD| = |SC| : |SB|$

$|SA| \cdot |SB| = |SC| \cdot |SD|$

Der Sehnensatz



Schneiden sich zwei Sehnen, so ist das Produkt aus den Abschnitten der einen Sehne gleich dem Produkt aus den Abschnitten der anderen Sehne.

Beweis

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle DCB$ (Fasskreisbogen über $\overset{\frown}{BD}$)

Beweis

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle DCB$ (Fasskreisbogen über $\overset{\frown}{BD}$)

$\Delta ABS \sim \Delta CDS$ (zwei gleiche Winkel)

Beweis

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle DCB$ (Fasskreisbogen über $\overset{\frown}{BD}$)

$\Delta ABS \sim \Delta CDS$ (zwei gleiche Winkel)

$|SA| : |SB| = |SC| : |SD|$

Beweis

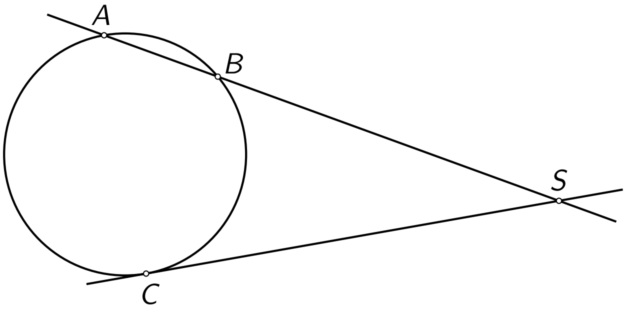
$\sphericalangle BAD = \sphericalangle DCB$ (Fasskreisbogen über $\overset{\frown}{BD}$)

$\Delta ABS \sim \Delta CDS$ (zwei gleiche Winkel)

$|SA| : |SB| = |SC| : |SD|$

$|SA| \cdot |SD| = |SB| \cdot |SC|$

Der Sekanten-Tangenten-Satz



Schneiden sich eine Sekante und eine Tangente, so ist das Produkt aus den vom Schnittpunkt aus gemessenen Abschnitten der Sekante gleich dem Quadrat über dem Tangentenabschnitt.

Beweis

$\sphericalangle SCB = \sphericalangle CAB$ (Sehnen-Tangenten-Winkel über BD)

Beweis

$\sphericalangle SCB = \sphericalangle CAB$ (Sehnen-Tangenten-Winkel über BD)

$\Delta SAC \sim \Delta SCB$ (zwei gleiche Winkel)

Beweis

$\sphericalangle SCB = \sphericalangle CAB$ (Sehnen-Tangenten-Winkel über BD)

$\Delta SAC \sim \Delta SCB$ (zwei gleiche Winkel)

$|SA| : |SC| = |SC| : |SB|$

Beweis

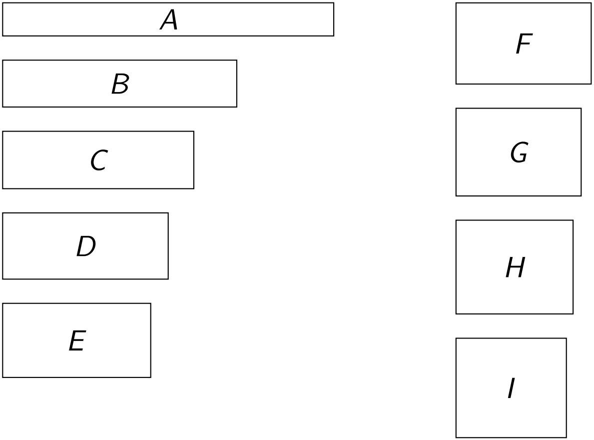
$\sphericalangle SCB = \sphericalangle CAB$ (Sehnen-Tangenten-Winkel über BD)

$\Delta SAC \sim \Delta SCB$ (zwei gleiche Winkel)

$|SA| : |SC| = |SC| : |SB|$

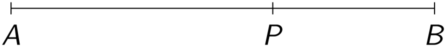
$|SA| \cdot |SB| = |SC|^2$

Welches Rechteck ist am „schönsten“?



Definition

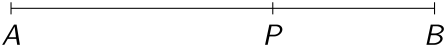
Teilt man eine Strecke AB durch einen Punkt $P \in AB$, so dass sich die gesamte Streckelänge $|AB|$ zum längeren Abschnitt verhält, wie dieser zum kürzeren, so spricht man von einer stetigen Teilung oder von einer Teilung im Goldenen Schnitt.



Formal:

Definition

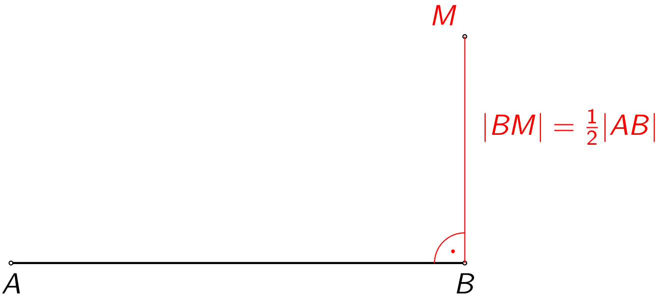
Teilt man eine Strecke AB durch einen Punkt $P \in AB$, so dass sich die gesamte Streckelänge $|AB|$ zum längeren Abschnitt verhält, wie dieser zum kürzeren, so spricht man von einer stetigen Teilung oder von einer Teilung im Goldenen Schnitt.



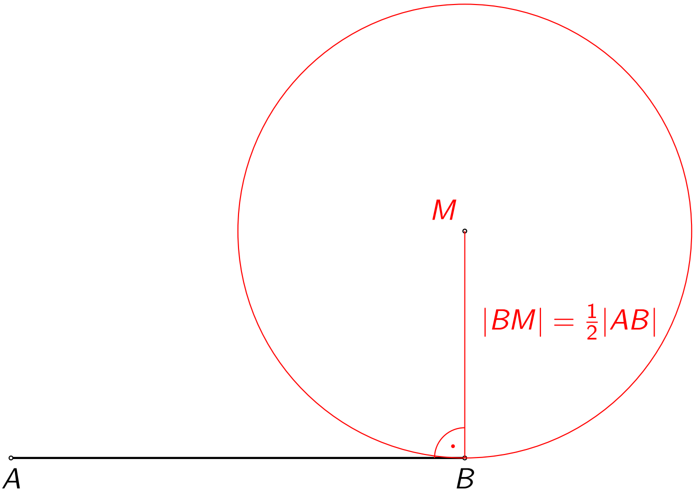
Formal: $|AB| : |AP| = |AP| : |PB|$

Konstruktion des Teilungspunkts P

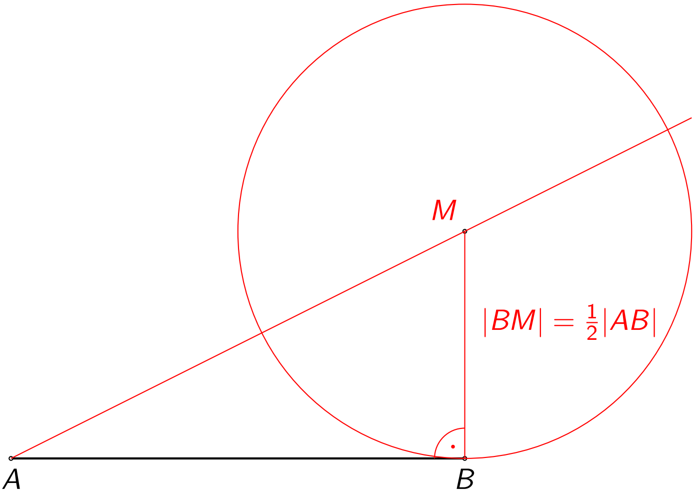
Konstruktion des Teilungspunkts P



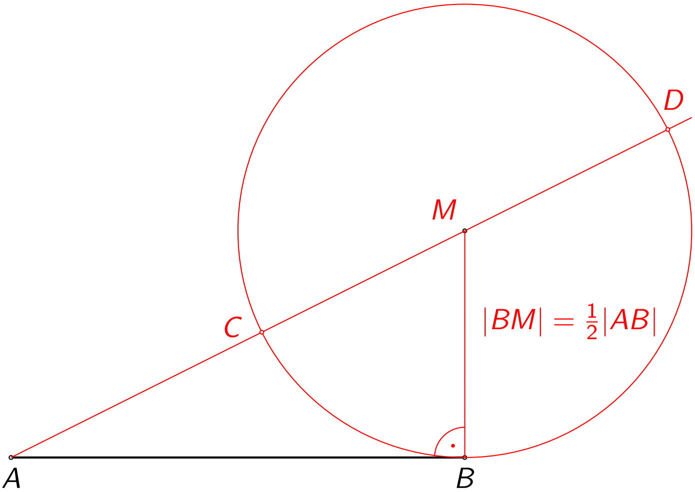
Konstruktion des Teilungspunkts P



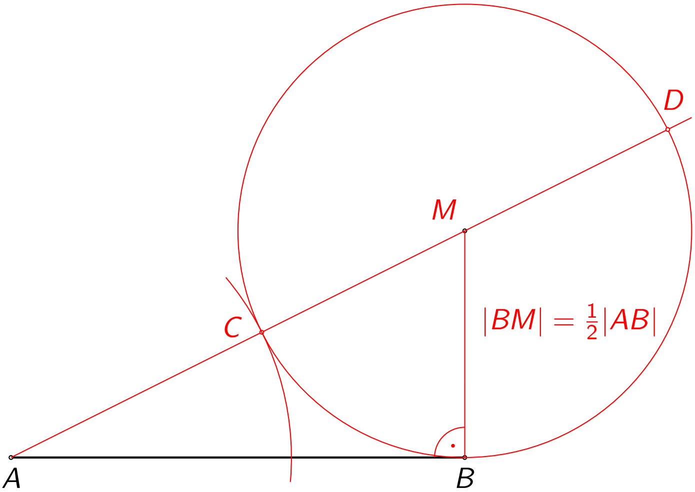
Konstruktion des Teilungspunkts P



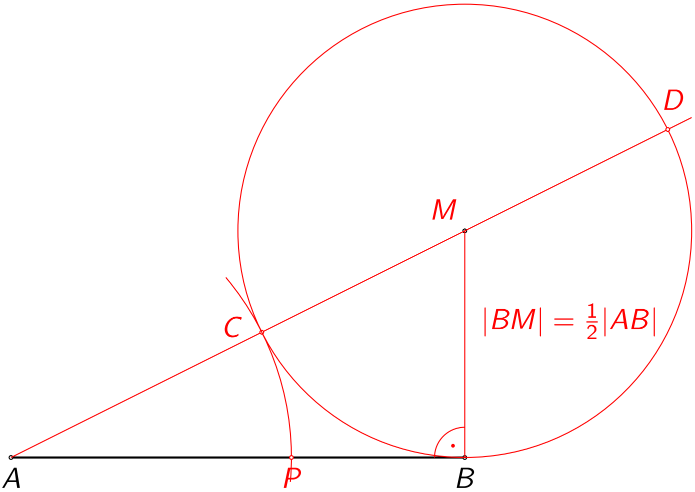
Konstruktion des Teilungspunkts P



Konstruktion des Teilungspunkts P



Konstruktion des Teilungspunkts P



Ist die Konstruktion korrekt?

Behauptung: $|AB| : |AP| = |AP| : |PB|$

Beweis:

Ist die Konstruktion korrekt?

Behauptung: $|AB| : |AP| = |AP| : |PB|$

Beweis:

(Sehnen-Tangentensatz)

Ist die Konstruktion korrekt?

Behauptung: $|AB| : |AP| = |AP| : |PB|$

Beweis:

$|AB|^2$ (Sehnen-Tangentensatz)

Ist die Konstruktion korrekt?

Behauptung: $|AB| : |AP| = |AP| : |PB|$

Beweis:

$$|AB|^2 = |AC| \cdot |AD| \quad \text{(Sehnen-Tangentensatz)}$$

Ist die Konstruktion korrekt?

Behauptung: $|AB| : |AP| = |AP| : |PB|$

Beweis:

$$|AB|^2 = |AC| \cdot |AD| \quad \text{(Sehnen-Tangentensatz)}$$
$$|AB|^2 = |AC| \cdot (|AC| + |CD|)$$

Ist die Konstruktion korrekt?

Behauptung: $|AB| : |AP| = |AP| : |PB|$

Beweis:

$$|AB|^2 = |AC| \cdot |AD| \quad \text{(Sehnen-Tangentensatz)}$$
$$|AB|^2 = |AC| \cdot (|AC| + |CD|)$$
$$|AB|^2 = |AP| \cdot (|AP| + |AB|) \quad \text{(nach Konstruktion)}$$

Ist die Konstruktion korrekt?

Behauptung: $|AB| : |AP| = |AP| : |PB|$

Beweis:

$$|AB|^2 = |AC| \cdot |AD| \quad \text{(Sehnen-Tangentensatz)}$$
$$|AB|^2 = |AC| \cdot (|AC| + |CD|)$$
$$|AB|^2 = |AP| \cdot (|AP| + |AB|) \quad \text{(nach Konstruktion)}$$
$$|AB|^2 = |AP|^2 + |AP| \cdot |AB|$$

Ist die Konstruktion korrekt?

Behauptung: $|AB| : |AP| = |AP| : |PB|$

Beweis:

$$|AB|^2 = |AC| \cdot |AD| \quad \text{(Sehnen-Tangentensatz)}$$
$$|AB|^2 = |AC| \cdot (|AC| + |CD|)$$
$$|AB|^2 = |AP| \cdot (|AP| + |AB|) \quad \text{(nach Konstruktion)}$$
$$|AB|^2 = |AP|^2 + |AP| \cdot |AB|$$
$$|AB|^2 - |AP| \cdot |AB| = |AP|^2$$

Ist die Konstruktion korrekt?

Behauptung: $|AB| : |AP| = |AP| : |PB|$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
|AB|^2 &= |AC| \cdot |AD| \quad \text{(Sehnen-Tangentensatz)} \\
|AB|^2 &= |AC| \cdot (|AC| + |CD|) \\
|AB|^2 &= |AP| \cdot (|AP| + |AB|) \quad \text{(nach Konstruktion)} \\
|AB|^2 &= |AP|^2 + |AP| \cdot |AB| \\
|AB|^2 - |AP| \cdot |AB| &= |AP|^2 \\
|AB| \cdot (|AB| - |AP|) &= |AP|^2
\end{aligned}
$$

Ist die Konstruktion korrekt?

Behauptung: $|AB| : |AP| = |AP| : |PB|$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
|AB|^2 &= |AC| \cdot |AD| \quad \text{(Sehnen-Tangentensatz)} \\
|AB|^2 &= |AC| \cdot (|AC| + |CD|) \\
|AB|^2 &= |AP| \cdot (|AP| + |AB|) \quad \text{(nach Konstruktion)} \\
|AB|^2 &= |AP|^2 + |AP| \cdot |AB| \\
|AB|^2 - |AP| \cdot |AB| &= |AP|^2 \\
|AB| \cdot (|AB| - |AP|) &= |AP|^2 \\
|AB| \cdot |PB| &= |AP|^2
\end{aligned}
$$

Ist die Konstruktion korrekt?

Behauptung: $|AB| : |AP| = |AP| : |PB|$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
|AB|^2 &= |AC| \cdot |AD| \quad \text{(Sehnen-Tangentensatz)}\\
|AB|^2 &= |AC| \cdot (|AC| + |CD|)\\
|AB|^2 &= |AP| \cdot (|AP| + |AB|) \quad \text{(nach Konstruktion)}\\
|AB|^2 &= |AP|^2 + |AP| \cdot |AB|\\
|AB|^2 - |AP| \cdot |AB| &= |AP|^2\\
|AB| \cdot (|AB| - |AP|) &= |AP|^2\\
|AB| \cdot |PB| &= |AP|^2 \quad \| : |AP| \quad : |PB|\\
|AB| : |AP| &= |AP| : |PB|
\end{aligned}
$$

Ist die Konstruktion korrekt?

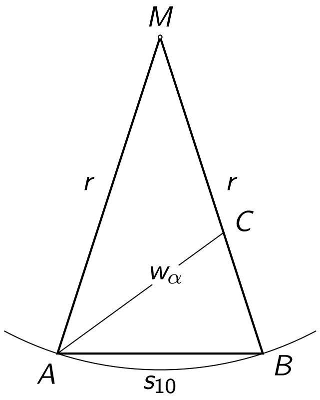
Behauptung: $|AB| : |AP| = |AP| : |PB|$

Beweis:

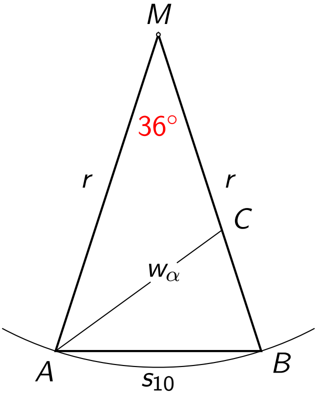
$$\begin{aligned}
|AB|^2 &= |AC| \cdot |AD| \quad \text{(Sehnen-Tangentensatz)}\\
|AB|^2 &= |AC| \cdot (|AC| + |CD|)\\
|AB|^2 &= |AP| \cdot (|AP| + |AB|) \quad \text{(nach Konstruktion)}\\
|AB|^2 &= |AP|^2 + |AP| \cdot |AB|\\
|AB|^2 - |AP| \cdot |AB| &= |AP|^2\\
|AB| \cdot (|AB| - |AP|) &= |AP|^2\\
|AB| \cdot |PB| &= |AP|^2 \quad || : |AP| \quad : |PB|\\
|AB| : |AP| &= |AP| : |PB|
\end{aligned}$$

$\square$

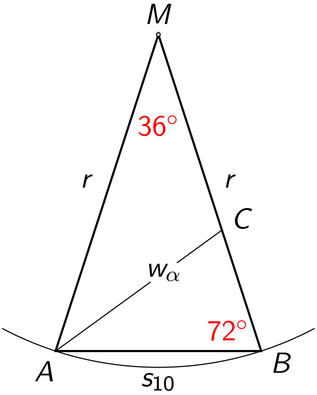
Das Goldene Dreieck



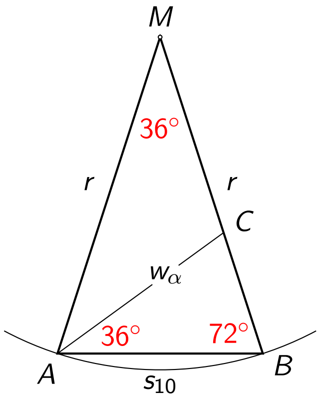
Das Goldene Dreieck



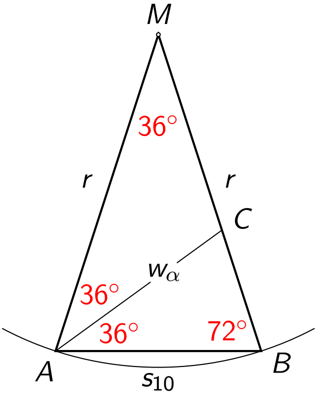
Das Goldene Dreieck



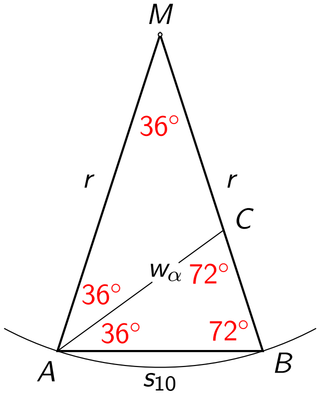
Das Goldene Dreieck



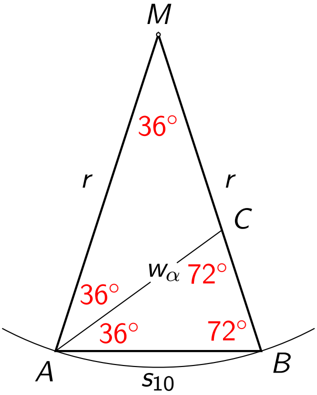
Das Goldene Dreieck



Das Goldene Dreieck

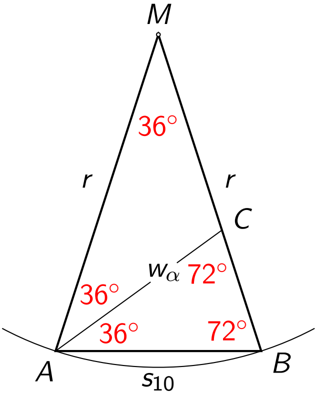


Das Goldene Dreieck



$$|AB| = |AC| = |MC|$$

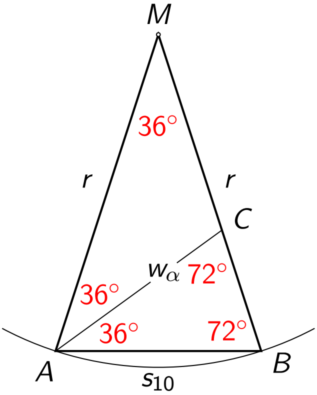
Das Goldene Dreieck



$|AB| = |AC| = |MC|$

$MAB \sim ABC$ (zwei gleiche Winkel)

Das Goldene Dreieck

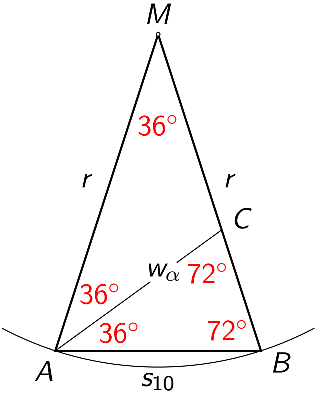


$|AB| = |AC| = |MC|$

$MAB \sim ABC$ (zwei gleiche Winkel)

$|MA| : |AB| = |AB| : |BC|$

Das Goldene Dreieck



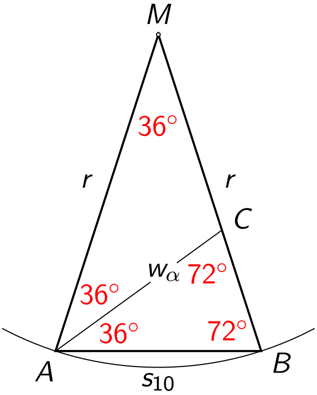
$|AB| = |AC| = |MC|$

$MAB \sim ABC$ (zwei gleiche Winkel)

$|MA| : |AB| = |AB| : |BC|$

$r : s_{10} = s_{10} : (r - s_{10})$

Das Goldene Dreieck



$|AB| = |AC| = |MC|$

$MAB \sim ABC$ (zwei gleiche Winkel)

$|MA| : |AB| = |AB| : |BC|$

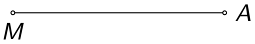
$r : s_{10} = s_{10} : (r - s_{10})$

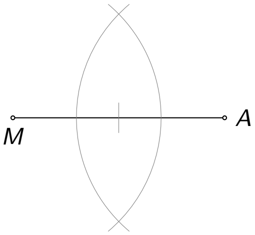
Die Seite des regelmässigen Zehnecks ist so lang wie der grössere Abschnitt des stetig geteilten Umkreisradius.

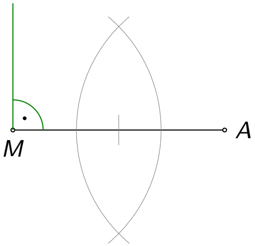
Konstruktion des regulären 10- und 5-Ecks

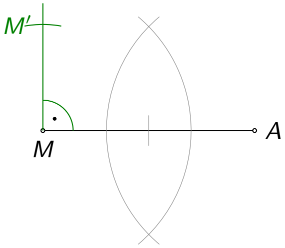
Gegeben: Strecke MA

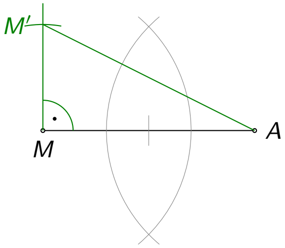
Gesucht: reguläres 10- und 5-Eck mit Umkreismittelpunkt M und Eckpunkt A.

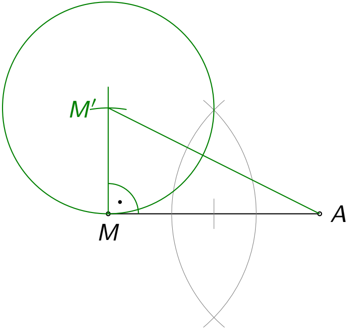

M
A

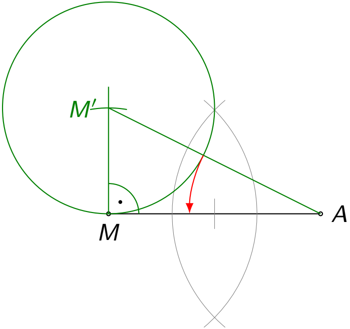

M
A

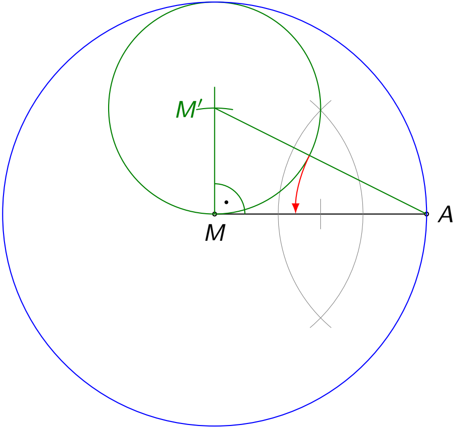

M
A

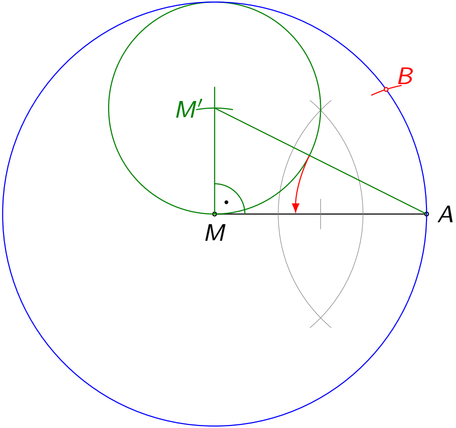

M'
M
A

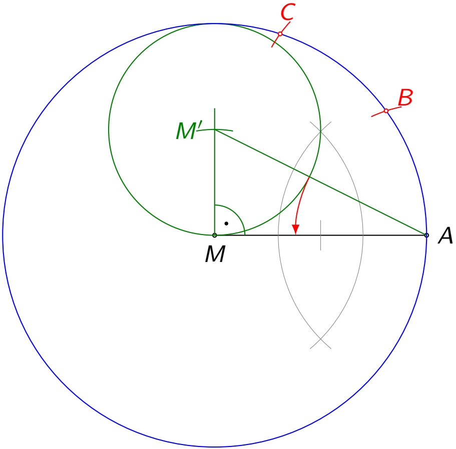

M′
A
M

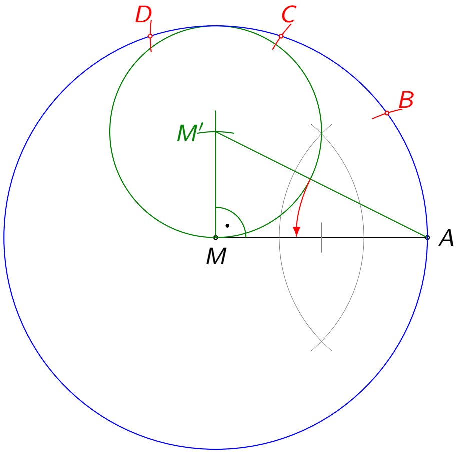

M'
M
A

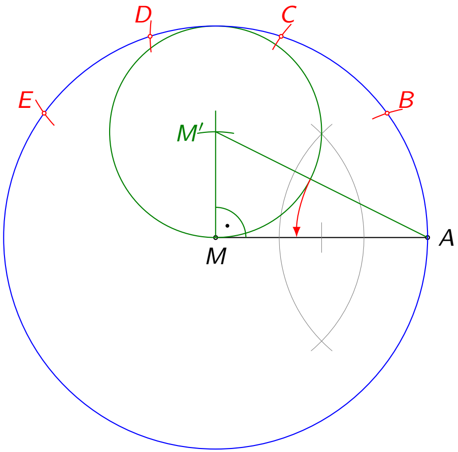

M′
M
A

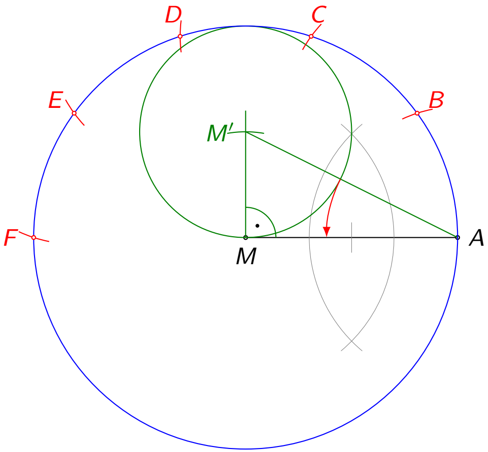

M′
M
A

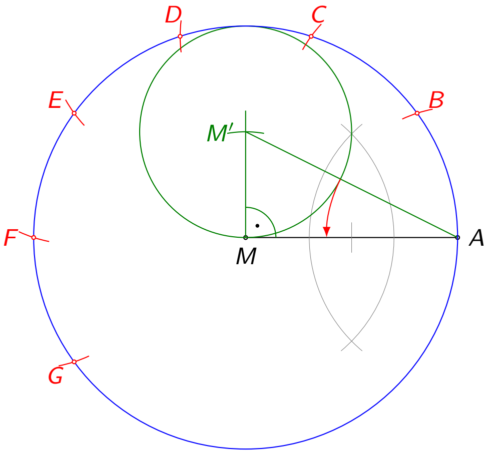

B
M′
A
M

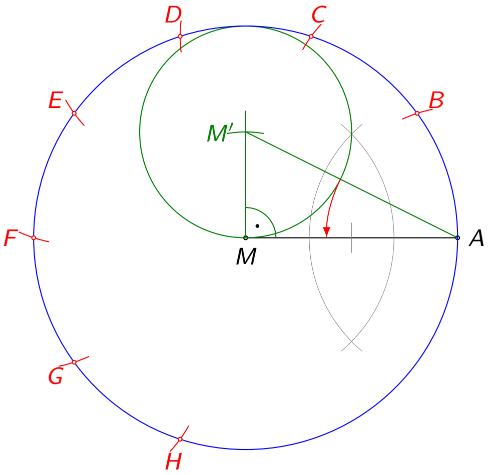

C
B
M′
A
M

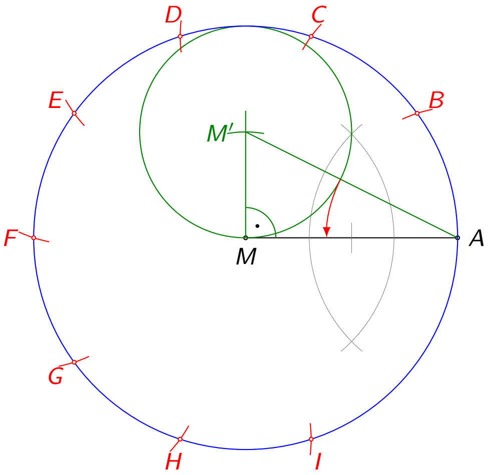

D
C
B
M′
M
A

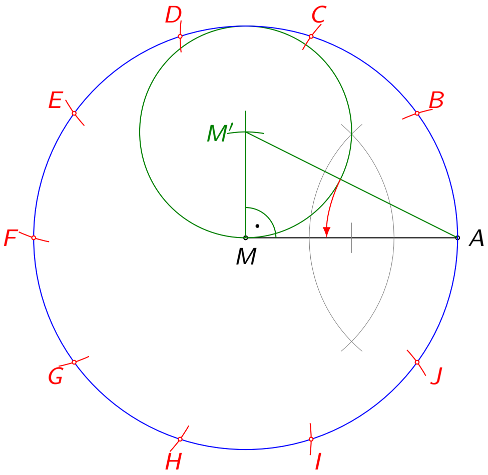

D
C
E
B
M′
M
A

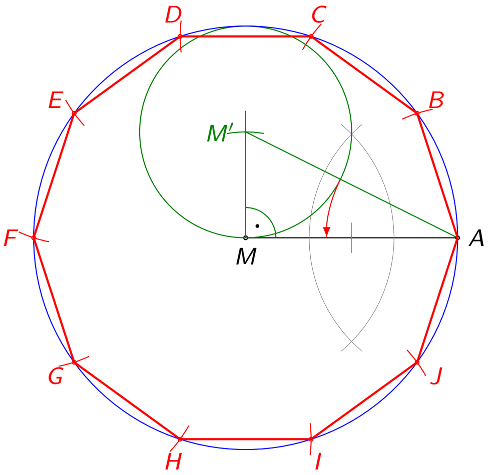

D
C
E
B
M′
F
A
M

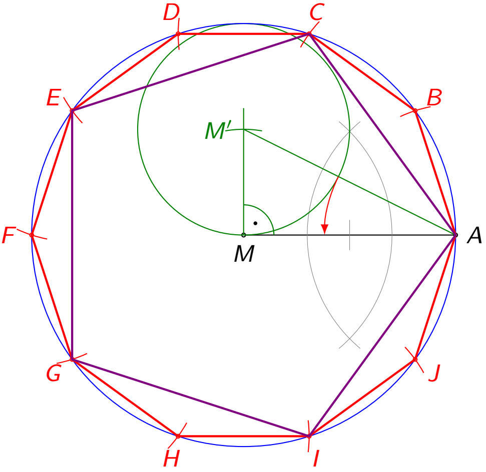

D
C
E
B
M′
F
A
M
G


D
C
E
B
M′
F
M
A
G
H


D
C
E
B
M′
F
M
A
G
H
I


D
C
E
B
M′
F
M
A
G
J
H
I


D
C
E
B
M′
F
M
A
G
J
H
I


D
C
B
E
M′
A
F
M
G
J
H
I