Rechnen mit Matrizen

1 Begriffe

Eine *Matrix* ist ein rechteckiges Zahlenschema aus m Zeilen und n Spalten.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 8 & 1 \\ 4 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A besteht aus 3 Zeilen und 4 Spalten und wird daher als 3×4-Matrix bezeichnet, wobei die Anzahl der Zeilen *vor* der Anzahl der Spalten genannt wird.

Matrizen werden üblicherweise mit Grossbuchstaben (in fetter Schrift) bezeichnet.

Das Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte einer Matrix A wird meist mit a_{ij} bezeichnet. In der obigen Matrix A gilt z. B. $a_{23} = 8$.

Spezialfälle

Eine $n \times n$*-Matrix* wird auch *quadratische* Matrix genannt.

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 7 & -6 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Die *Hauptdiagonale* einer quadratischen Matrix A besteht aus allen Elementen a_{ii}.

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 7 & -6 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine *Diagonalmatrix* ist eine quadratische Matrix, deren Elemente ausserhalb der Hauptdiagonalen alle null sind. Es ist nicht verboten, dass Nullen auch auf der Diagonale stehen.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine Diagonalmatrix mit lauter Einsen auf der Hauptdiagonalen wird *Einheitsmatrix* genannt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine $m \times n$-Matrix, die nur Nullen als Elemente besitzt, heisst *Nullmatrix*.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix mit nur einer Spalte wird *Spaltenvektor* genannt.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix mit nur einer Zeile heisst *Zeilenvektor*.

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

2 Rechenoperationen

Addition und Subtraktion

Sind A und B zwei $m \times n$-Matrizen, dann ist die Summe $C = A + B$ definiert und es gilt:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (\text{für } 1 \leq i \leq m \text{ und } 1 \leq j \leq n)$$

Die Differenz $A - B$ zweier Matrizen gleicher Grösse ist analog definiert.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 9 \\ 3 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -11 \\ 1 & -4 & 13 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit Zahlen

Ist A eine $m \times n$-Matrix und $r \in \mathbb{R}$, so ist $B = rA$ definiert und es gilt:

$$b_{ij} = r \cdot a_{ij} \quad (\text{für } 1 \leq i \leq m \text{ und } 1 \leq j \leq n)$$

Anstelle von $(-1) \cdot A$ schreibt man auch kürzer $-A$.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$-5A = \begin{pmatrix} -25 & -15 & 10 \\ -20 & -5 & -35 \end{pmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen

Ist A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix, dann ist das Produkt $C = AB$ definiert und für die Elemente von C gilt:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad (\text{für } 1 \leq i \leq m \text{ und } 1 \leq j \leq p)$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 & 1 \\ 6 & 9 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5\cdot 7 + 3\cdot 6 & 5\cdot 0 + 3\cdot 9 & 5\cdot 5 + 3\cdot 8 & 5\cdot 1 + 3\cdot 2 \\ 2\cdot 7 + 1\cdot 6 & 2\cdot 0 + 1\cdot 9 & 2\cdot 5 + 1\cdot 8 & 2\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ 4\cdot 7 + 0\cdot 6 & 4\cdot 0 + 0\cdot 9 & 4\cdot 5 + 0\cdot 8 & 4\cdot 1 + 0\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 53 & 27 & 49 & 11 \\ 20 & 9 & 18 & 4 \\ 28 & 0 & 20 & 4 \end{pmatrix}$$

Transposition

Die *Transponierte* einer $m \times n$-Matrix A ist die $n \times m$-Matrix B mit:

$$b_{ij} = a_{ji} \qquad (\text{für } 1 \leq i \leq n \text{ und } 1 \leq j \leq m)$$

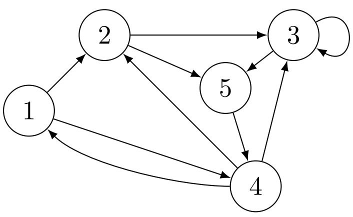
Die Transponierte einer Matrix A wird mit A^{T} bezeichnet.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

3 Anwendungen

3.1 Adjazenzmatrix für (gerichtete) Graphen



$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{es gibt eine Kante von Knoten } i \text{ nach Knoten } j. \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$