Aufgabe 1

Für ein Orthogonalsystem $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ und Skalare $a_1, \ldots, a_n$ gilt:

$$\vec{v}_i\left[a_1\vec{v}_1 + \cdots + a_{i-1}\vec{v}_{i-1} + a_i\vec{v}_i + a_{i+1}\vec{v}_{i+1} + \cdots + a_n\vec{v}_n\right]$$

$$= a_1\vec{v}_i\vec{v}_1 + \cdots + a_{i-1}\vec{v}_i\vec{v}_{i-1} + a_i\vec{v}_i\vec{v}_i + a_{i+1}\vec{v}_i\vec{v}_{i+1} + \cdots + a_n\vec{v}_i\vec{v}_n$$

$$= 0 + \cdots + 0 + a_i\vec{v}_i\vec{v}_i + 0 + \cdots + 0$$

$$= a_i\vec{v}_i\vec{v}_i = a_i\vec{v}_i^2 = a_i\left|\vec{v}_i\right|^2$$

Multiplikation der Gleichung $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 + a_4\vec{v}_4 = \vec{w}$ mit $\vec{v}_1$:

$$a_1\vec{v}_1\vec{v}_1 = \vec{v}_1\vec{w} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{\vec{v}_1\vec{w}}{\vec{v}_1\vec{v}_1} = \frac{7}{15}$$

Analog: $a_2 = \dfrac{\vec{v}_2\vec{w}}{\vec{v}_2\vec{v}_2} = \dfrac{1}{15}$; $\quad a_3 = \dfrac{\vec{v}_3\vec{w}}{\vec{v}_3\vec{v}_3} = \dfrac{-1}{15}$; $\quad a_4 = \dfrac{\vec{v}_4\vec{w}}{\vec{v}_4\vec{v}_4} = \dfrac{2}{15}$

Aufgabe 2

(a)
$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &= \int_0^1 (x^3 - 8x + 4)(x^2 + 2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (x^5 + 2x^3 - 8x^3 - 16x + 4x^2 + 8)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (x^5 - 6x^3 + 4x^2 - 16x + 8)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 8x\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{6} - \frac{9}{6} + \frac{8}{6} - 8 + 8 = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad f \perp g$$

Aufgabe 2

(b) $$|f| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_0^1 (x^2 + 6x - 3)^2\,\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{21}{5}}$$

(c) $$\varphi = \arccos \frac{\langle f, g\rangle}{|f| \cdot |g|}$$

$$= \arccos \frac{\displaystyle\int_0^1 (x+2)(2x-1)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\displaystyle\int_0^1 (x+2)^2\,\mathrm{d}x} \cdot \sqrt{\displaystyle\int_0^1 (2x-1)^2\,\mathrm{d}x}}$$

$$= \arccos \frac{\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{19}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}} = \arccos \frac{1}{2\sqrt{19}} = 1.456\,\mathrm{rad}$$

Aufgabe 3

(a) $$L_0(x) = \frac{0!}{0! \cdot 0!} \cdot \frac{(-1)^0}{0!} x^0 = 1$$

$$L_1(x) = \frac{1!}{0! \cdot 1!} \cdot \frac{(-1)^0}{0!} x^0 + \frac{1!}{1! \cdot 0!} \cdot \frac{(-1)^1}{1!} x^1 = 1 - x$$

(b) $$L_2(x) = \frac{2!}{0! \cdot 2!} \cdot \frac{(-1)^0}{0!} x^0 + \frac{2!}{1! \cdot 1!} \cdot \frac{(-1)^1}{1!} x^1 + \frac{2!}{2! \cdot 0!} \cdot \frac{(-1)^2}{2!} x^2 = 1 - 2x + \frac{1}{2} x^2$$

(c) $$\langle L_0, L_1\rangle = \int_0^\infty 1 \cdot (1-x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^\infty$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left(a\mathrm{e}^{-a} - 0\right) = 0$$

Aufgabe 4

(a) Bringe die Matrix durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform (ref) oder reduzierte Zeilenstufenform (rref):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Rang} = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{linear unabhängig}$$

(b) $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} \vec{b}_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{0+3+3}{0+1+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} \vec{b}_1 - \frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2} \vec{b}_2$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{0+1+3}{0+1+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3+0+0}{1+0+0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Normieren bedeutet, einen Vektoren mit einem geeigneten Skalar zu multiplizieren, damit er die Länge 1 bekommt.

$$\vec{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

(a) Bringe die Matrix durch elementare Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform (rref):

$$\text{rref} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{linear unabhängig}$$

(b) $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2+2+2}{1+4+1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{b}_3 &= \vec{a}_3 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1}\vec{b}_1 - \frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2}\vec{b}_2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1-4+0}{1+4+1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1+2+0}{1+1+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(c) Normieren bedeutet, einen Vektoren mit einem geeigneten Skalar zu multiplizieren, damit er die Länge 1 bekommt.

$$
\vec{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{c}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
$$