Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
\vec{v}_k\big[a_1\vec{v}_1 + \cdots + a_k\vec{v}_k + \cdots + a_n\vec{v}_n\big] &= \vec{v}_k\vec{w} \\
a_1\vec{v}_k\vec{v}_1 + \cdots + a_k\vec{v}_k\vec{v}_k + \cdots + a_n\vec{v}_k\vec{v}_n &= \vec{v}_k\vec{w} \quad \text{(Distributivgesetz)} \\
a_k\vec{v}_k\vec{v}_k &= \vec{v}_k\vec{w} \quad (\vec{v}_k\vec{v}_i = 0 \text{ für } k \neq i) \\
a_k &= \frac{\vec{v}_k\vec{w}}{\vec{v}_k\vec{v}_k}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$\langle f, g\rangle = \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\langle f, f\rangle = \int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\langle g, g\rangle = \int_1^2 x^{-6}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{5}x^{-5}\right]_1^2 = -\frac{1}{160} + \frac{1}{5} = \frac{31}{160}$$

$$\begin{aligned}
\angle(f, g) &= \arccos\frac{\langle f, g\rangle}{\sqrt{\langle f, f\rangle \cdot \langle g, g\rangle}} \\
&= \arccos\frac{1/2}{\sqrt{217/480}} = 0.732\,\mathrm{rad} = 41.96^\circ
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a) $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(n-k)!}{n!}x^k$

$$P_0(x) = (-1)^0 \cdot \frac{(0-0)!}{0!}x^0 = 1$$

$$P_1(x) = (-1)^0 \cdot \frac{(1-0)!}{1!}x^0 + (-1)^1 \cdot \frac{(1-1)!}{1!}x^1 = 1 - x$$

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= (-1)^0 \cdot \frac{(2-0)!}{2!}x^0 + (-1)^1 \cdot \frac{(2-1)!}{2!}x^1 \\
&\quad + (-1)^2 \cdot \frac{(2-2)!}{2!}x^2 = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2
\end{aligned}$$

(b) $P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x + 1$

$P_{n+1} = xP_n(x) + nP_{n-1}(x)$

$$P_2(x) = x \cdot P_1(x) + 1 \cdot P_0(x) = x(x+1) + 1 \cdot 1 = x^2 + x + 1$$

$$\begin{aligned} P_3(x) &= x \cdot P_2(x) + 2 \cdot P_1(x) = x(x^2 + x + 1) + 2(x+1) \\ &= x^3 + x^2 + x + 2x + 2 = x^3 + x^2 + 3x + 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a) Bringe die Matrix $A = \left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right)$ auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\operatorname{rref}(A) = \operatorname{rref}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 7 & 4 \\ 1 & 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Rang}(A) = 3 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3$ linear unabhängig

(b) $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \vec{b}_2 &= \vec{a}_2 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} \vec{b}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{b}_3 &= \vec{a}_3 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} \vec{b}_1 - \frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2} \vec{b}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Normieren bedeutet, einen Vektoren mit einem geeigneten Skalar zu multiplizieren, damit er die Länge 1 bekommt.

$$\vec{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$