Aufgabe 1

$$f(x) = \begin{cases} \pi & \text{für } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} < x < 2\pi \end{cases} \qquad (2\pi\text{-periodisch fortgesetzt})$$

Symmetrie: gemischt

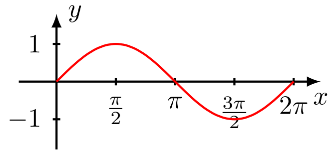
Es treten Sinus- und Cosinusfunktionen auf.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \pi = \frac{\pi}{4}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \pi\cos(kx)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos(kx)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{2} = \dots$$

$$a_k = \dots = \frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{2}$$



$$a_1 = \frac{1}{1} \cdot 1 = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

$$a_3 = \frac{1}{3} \cdot (-1) = -\frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0$$

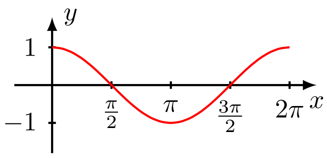
usw.

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \pi\sin(kx)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin(kx)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{k}\cos(kx)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{k}\left(-\cos\frac{k\pi}{2} + 1\right)$$

$$b_k = \dots = \frac{1}{k}\left(1 - \cos\frac{k\pi}{2}\right)$$



$$b_1 = \frac{1}{1} \cdot 1 = 1$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$b_3 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$b_4 = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0$$

usw.

Schlussresultat:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \cos(x) + \sin(x) + \sin(2x) - \frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{1}{3}\sin(3x)$$
$$+ \frac{1}{5}\cos(5x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{3}\sin(6x) + \dots$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leq x < 0 \\ \sin x & \text{für } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Hinweis: Da die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[-\pi, 0)$ den Wert Null hat, können wir uns bei den folgenden Rechnungen auf das Integrationsintervall $[0, \pi]$ beschränken.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \big[-\cos x\big]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \big(-\cos\pi + \cos 0\big) \\ &= \frac{1}{2\pi} \big(1 + 1\big) \\ &= \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \sin(x-x)+\sin(x+x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \sin 2x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi} \\
&= -\frac{1}{4\pi}\cdot(\cos 2\pi-\cos 0) \\
&= 0 \\
a_2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x\cos 2x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \big(\sin(x-2x)+\sin(x+2x)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \big(\sin 3x-\sin x\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cos 3x+\cos x\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left\{\left(-\frac{1}{3}\cos 3\pi+\cos\pi\right)-\left(-\frac{1}{3}\cos 0+\cos 0\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left\{\left(\frac{1}{3}-1\right)-\left(-\frac{1}{3}+1\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{3\pi} \\
b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \big(\cos(x-x)-\cos(x+x)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \big(\cos 0-\cos 2x\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\left\{\left(\pi-\frac{1}{2}\sin 2\pi\right)-\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\pi = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Eine T-periodische Funktion soll durch eine Summe von Cosinus- und Sinusfunktionen von der Form $\cos(k\omega t)$ $(k \geq 0)$ und $\sin(k\omega t)$ $(k \geq 1)$ dargestellt bzw. approximiert werden, wobei $\omega = 2\pi/T$.

Aufgabe 4

Faktor	*Typ*
x^3	ungerade
$(x^4 - 1)$	gerade
$\cos(222x)$	gerade
$\|x\|$	gerade

Wegen

- gerade · gerade = ungerade · ungerade = gerade
- gerade · ungerade = ungerade

ist die Funktion f ungerade.

Aufgabe 5

TR: Fourierzerlegung von $f(x) = \sin^3 x$.

$f(x) = \sin^3 x$ ist ungerade $\quad \Rightarrow \quad$ nur b_k-Koeffizienten

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^3 x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{3}{4}$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^3 x \cdot \sin 2x \, \mathrm{d}x = 0$$

$$b_3 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^3 x \cdot \sin 3x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{4}$$

$$b_4 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^3 x \cdot \sin 4x \, \mathrm{d}x = 0 = b_5 = b_6 = \ldots$$

$$f(x) = \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$$

Aufgabe 6

(a) $\displaystyle\int_{-99}^{99} x^{99} \, \mathrm{d}x = 0$ (ungerade Funktion, symmetrische Grenzen)

(b) $\displaystyle\int_{-99}^{99} x^{98}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{99} x^{98}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{1}{99}\cdot\left[x^{99}\right]_0^{99}$

$$= 2\cdot\frac{1}{99}\cdot 99^{99} = 2\cdot 99^{98}$$

(c) $\displaystyle\int_{2307\pi}^{2309\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 0$ (2π-periodische Funktion)

Aufgabe 7

(a) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \cos 33x\cdot\sin 55x\,\mathrm{d}x = 0$

Spezielle Integrale (Formelsammlung S. 74)

(b) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \sin 77x\cdot\sin 77x\,\mathrm{d}x = \pi$

Spezielle Integrale (Formelsammlung S. 74)

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos 55x\cdot\sin 44x\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi} \sin 44x\cdot\cos 55x\,\mathrm{d}x$

FTB. S. 99 (Summen und Produkte)

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\big(\sin(44x-55x)+\sin(44x+55x)\big)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\big(\sin(-11x)+\sin(99x)\big)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{11}\cos(11x)-\frac{1}{99}\cos(99x)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{11}\cos(11\pi)-\frac{1}{99}\cos(99\pi)\right)-\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{99}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{11}+\frac{1}{99}\right)-\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{99}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{99}-\frac{2}{11}\right) = -\frac{8}{99}$$

Aufgabe 8

Die Phasenverschiebung von 1 kann ignoriert werden.

$\cos(0.2\pi t + 2\pi) = \cos\left(0.2\pi\,[t+10]\right) \quad\Rightarrow\quad T = 10$

Herleitung in Einzelschritten:

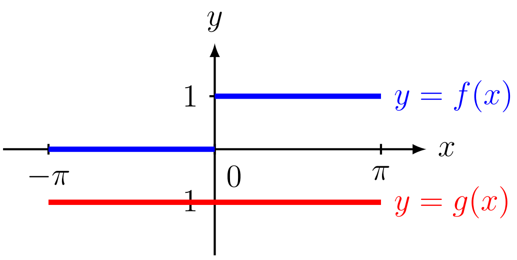
$$
\begin{aligned}
\cos(0.2\pi(t+T)+1) &= \cos(0.2\pi t+1) \\
0.2\pi(t+T)+1 &= 0.2\pi t+1+2\pi \\
0.2\pi t+0.2\pi T &= 0.2\pi t+2\pi \\
0.2\pi T &= 2\pi \\
T &= \frac{2\pi}{0.2\pi} = 10
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9

Verwende die Zwischenwinkelformel aus der Vektorgeometrie:

$$\varphi = \arccos \frac{\langle f,g\rangle}{\sqrt{\langle f,f\rangle \cdot \langle g,g\rangle}}$$

mit dem Skalarprodukt $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$.



$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi} (-1)\,\mathrm{d}x = [-x]_0^\pi = -\pi$$

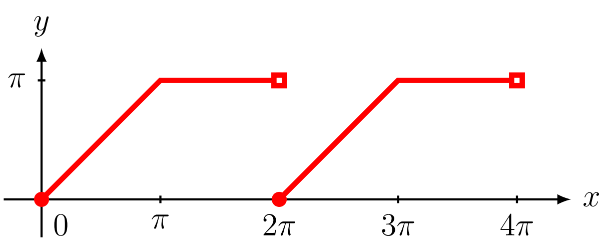
$$\langle f,f\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi} 1\,\mathrm{d}x = [x]_0^\pi = \pi$$

$$\langle g,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} 1\,\mathrm{d}x = [x]_{-\pi}^\pi = \pi-(-\pi) = 2\pi$$

Also: $\varphi = \arccos \frac{-\pi}{\sqrt{\pi\cdot 2\pi}} = \arccos \frac{-\pi}{\pi\sqrt{2}} = \arccos \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4}\,\text{rad} = 135°$

Aufgabe 10

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \le x < \pi \\ \pi & \text{für } \pi \le x < 2\pi \end{cases}$$



$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} \pi\,\mathrm{d}x\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi} + [\pi x]_{\pi}^{2\pi}\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\pi^2 + \pi^2\right\} \\
&= \frac{3}{4}\pi \\
a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} \pi\cos x\,\mathrm{d}x}_{0} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\underbrace{[x\cdot\sin x]_0^{\pi}}_{0} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}[\cos x]_0^{\pi} \\
&= -\frac{2}{\pi} \\
b_2 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin 2x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} \pi\sin 2x\,\mathrm{d}x}_{0} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin 2x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-x\cdot\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\cos 2x\,\mathrm{d}x}_{0} \\
&= -\frac{1}{2\pi}[\pi\cdot\cos 2\pi - 0] \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 11

(a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < \pi \\ -1 & \text{für } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \{g(x)\} \quad [g(x) \text{ ist Rechteckfunktion, S. 80}]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ 2 \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right) \right\}$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

(b) $f(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{für } -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x & \text{für } 0 \leq x < \pi \end{cases}$

$$f(x) = g(x + \pi) \quad [g \text{ ist Dreieckfunktion}]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(x + \pi) + \frac{\cos(3(x + \pi))}{3^2} + \frac{\cos(5(x + \pi))}{5^2} + \dots \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(x + \pi) + \frac{\cos(3x + 3\pi)}{3^2} + \frac{\cos(5x + 5\pi)}{5^2} + \dots \right)$$

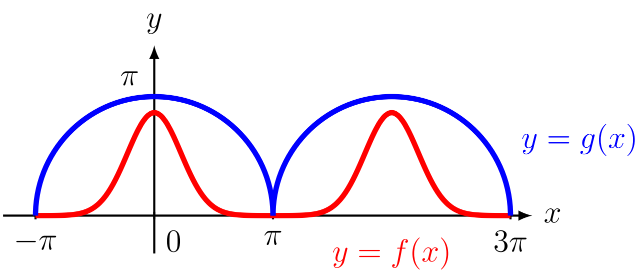
$$\overset{\text{S. 99}}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(x + \pi) + \frac{\cos(3x + \pi)}{3^2} + \frac{\cos(5x + \pi)}{5^2} + \dots \right)$$

$$\overset{\text{S. 99}}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(-\cos x - \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 5x}{5^2} - \dots \right)$$

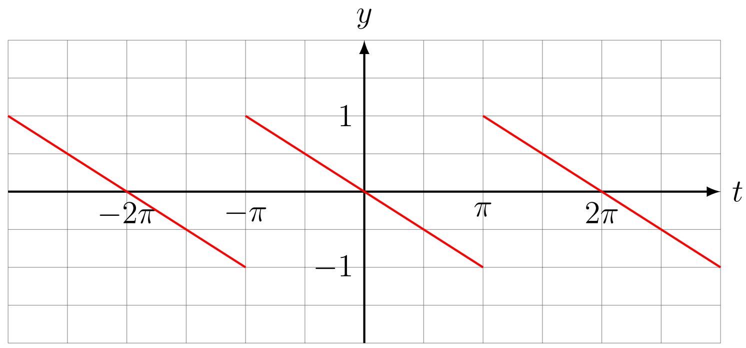
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$$

Aufgabe 12

Die Funktion $f(x)$ hat die besser konvergente Fourierreihe, da sie im Gegensatz zu $g(x)$ an den Intervallgrenzen differenzierbare Übergänge besitzt.



Aufgabe 13



y
1
t
−2π
−π
π
2π
−1