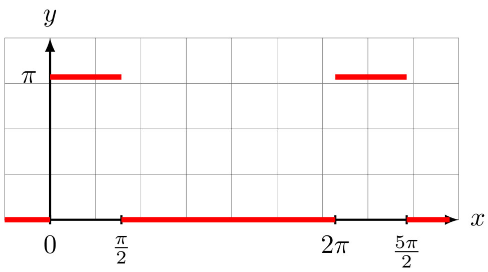
Aufgabe 1

Gegeben ist die nachstehend skizzierte 2π-periodische Rechteck-Funktion.

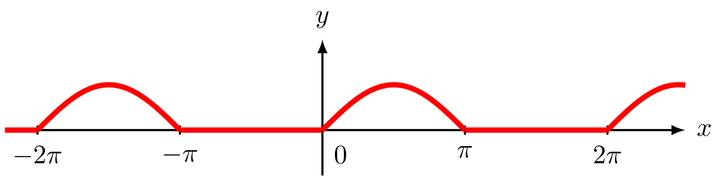


Bestimme die Fourierreihe dieser Funktion möglichst so weit, bis ersichtlich wird, wie sich die Folge der Koeffizienten fortsetzt.

Aufgabe 2

Gegeben ist die 2π-periodische Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leq x < 0 \\ \sin x & \text{für } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$



Bestimme folgende Fourierkoeffizienten durch formale Rechnung: a_0, a_1, b_1 und a_2 . Wo dies möglich ist, können Formeln der Formelsammlung entnommen werden.

Aufgabe 3

Erkläre das Konzept der Fourierreihe.

Aufgabe 4

Ist die Funktion $f(x) = x^3(x^4 - 1)\cos(222x)|x|$

(a) gerade,

(b) ungerade,

(c) weder gerade noch ungerade?

Begründe die Antwort.

Aufgabe 5

Berechne mit Hilfe des Taschenrechners die (endliche) Fourierzerlegung von $f(x) = \sin^3 x$.

Aufgabe 6

Bestimme den exakten Wert des Integrals.

(a) $\displaystyle\int_{-99}^{99} x^{99}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_{-99}^{99} x^{98}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_{2307\pi}^{2309\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 7

Berechne die Integrale: (Begründe, falls keine Rechnung nötig ist.)

(a) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \cos 33x \cdot \sin 55x\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \sin 77x \cdot \sin 77x\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos 55x \cdot \sin 44x\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 8

Welche Periode T hat die Funktion $f(t) = \cos(0.2\pi t + 1)$?

Aufgabe 9

Die beiden auf dem Intervall $[-\pi, \pi)$ definierten Funktionen

- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq x < \pi \end{cases}$
- $g(x) = -1$

werden ausserhalb dieses Intervalls 2π-periodisch fortgesetzt.

Berechne mit Hilfe des für 2π-periodische Funktionen definierten Skalarprodukts den Winkel φ zwischen den beiden Funktionen.

Aufgabe 10

Skizziere die 2π-periodisch fortzusetzende Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x < \pi \\ \pi & \text{für } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

und berechne formal die Fourierkoeffizienten a_0, a_1 und b_2.

Aufgabe 11

Ermittle mit Hilfe der Fourierentwicklung bereits bekannter Funktionen (siehe Formelsammlung) die Fourrierreihe der gegebenen Funktion.

(a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x < \pi \\ -1 & \text{für } \pi \le x < 2\pi \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{für } -\pi \le x < 0 \\ \pi - x & \text{für } 0 \le x < \pi \end{cases}$

Aufgabe 12

Welche der folgenden Funktionen hat die besser konvergierende Fourierreihe? Begründe die Antwort.

- $f(x) = \mathrm{e}^{1-x^2} \quad \text{für } -\pi \le x < \pi$
- $g(x) = \pi^2 - x^2 \quad \text{für } -\pi \le x < \pi$

Aufgabe 13

Skizziere mit dem Taschenrechners näherungsweise den Graphen der 2π-periodischen Funktion $f(t)$, die durch die Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{k\pi} \sin(kt)$$

definiert wird. Skizziere anschliessend den Graphen von $f(t)$ exakt für $-3\pi < t < 3\pi$ in das vorbereitete Koordinatensystem.