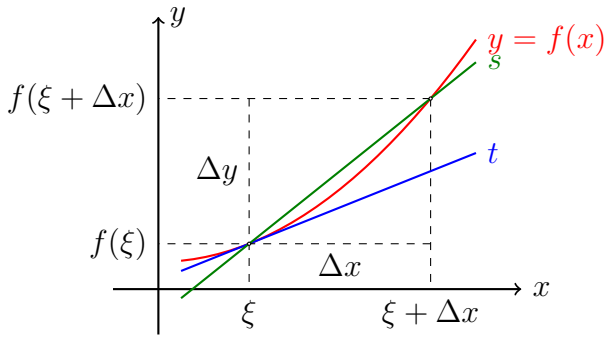
AM1: Das Differenzial

1 Einführung



Wir setzen voraus, dass f eine an der Stelle ξ [sprich xi] differenzierbare Funktion ist.

Mit φ bezeichnen wir die Differenz zwischen dem Differenzen- und dem Differenzialquotienten. Geometrisch entspricht dies dem Unterschied zwischen der Sekanten- und der Tangentensteigung.

Für eine bestimmte Stelle ξ hängt diese Differenz von Δx ab. Daher fassen wir φ als eine Funktion $\varphi(\Delta x)$ auf.

$$\varphi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(\xi)$$

$$\varphi(\Delta x) \cdot \Delta x = \Delta y - f'(\xi) \cdot \Delta x$$

$$\Delta y = \underbrace{\underbrace{f'(\xi)}_{\text{const.}} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\downarrow 0}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\underbrace{\varphi(\Delta x)}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\downarrow 0}}_{\downarrow 0}$$

$f'(\xi) \cdot \Delta x$: Konvergenz 1. Ordnung

$\varphi(\Delta x) \cdot \Delta x$: Konvergenz von höherer als 1. Ordnung

$\mathrm{d}y \overset{\text{Def.}}{=} f'(\xi) \cdot \Delta x$ *Differenzial* von f an der Stelle ξ

Für $y = x$ gilt $\mathrm{d}y = 1 \cdot \Delta x = \mathrm{d}x$ und damit:

$\boxed{\mathrm{d}y = f'(\xi) \cdot \mathrm{d}x}$ ($\mathrm{d}x$ ist „kleine“ *endliche* Grösse)

2 Ableitungsregeln in Differenzial-Schreibweise

- $\mathrm{d}(f \pm g) = \mathrm{d}f \pm \mathrm{d}g$
- $\mathrm{d}(c \cdot f) = c \cdot \mathrm{d}f$
- $\mathrm{d}(f \cdot g) = \mathrm{d}f \cdot g + f \cdot \mathrm{d}g$

- $\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\mathrm{d}f \cdot g - f \cdot \mathrm{d}g}{g^2}$

- $\mathrm{d}f\big(g(x)\big) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}x$

Beispiele

(a) $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}f = 2x \cdot \mathrm{d}x$

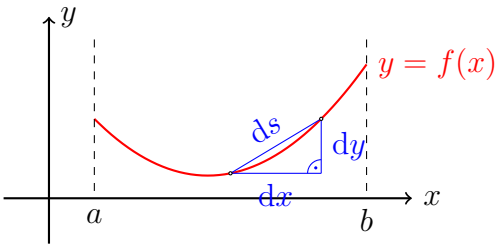
(b) $g(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}g = \cos x \cdot \mathrm{d}x$

(c) $x(t) = \mathrm{e}^t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \mathrm{e}^t \cdot \mathrm{d}t$

(d) $z(x) = \cos(4x) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}z \overset{y=4x}{=} -\sin(y) \cdot \mathrm{d}y = -\sin(4x) \cdot 4 \cdot \mathrm{d}x$

3 Anwendung: Bogenlänge einer Kurve

3.1 explizite Funktion: $y = f(x)$



$$s = \int_a^b \mathrm{d}s = ?$$

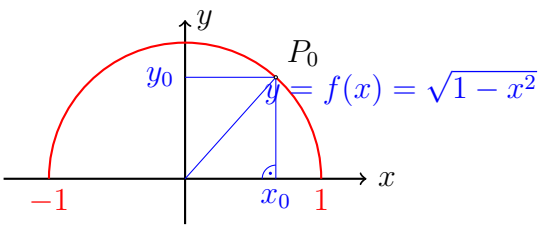
$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \big[\mathrm{d}f(x)\big]^2} = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \big[f'(x) \cdot \mathrm{d}x\big]^2}$$

$$= \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \big[f'(x)\big]^2 \cdot \mathrm{d}x^2} = \sqrt{1 + \big[f'(x)\big]^2} \cdot \mathrm{d}x$$

Also:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \big[f'(x)\big]^2} \cdot \mathrm{d}x$$

Beispiel: Länge des Einheits-Halbkreises



$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$s = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

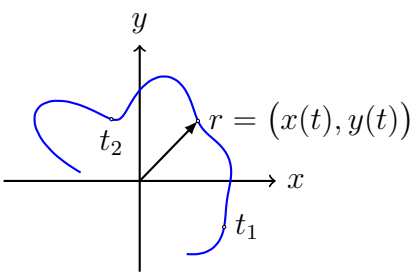
$$= 2\big[\arcsin x\big]_0^1 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

Bemerkung

Bogenlängen-Integrale können kompliziert werden $\rightarrow$ TR

3.2 Parameterform

$k\colon \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$



Satz des Pythagoras für die Differenziale:

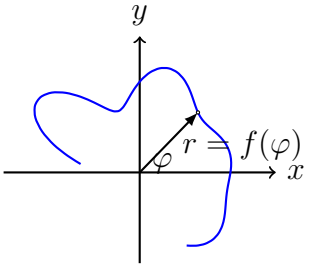
$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{[x'(t) \cdot \mathrm{d}t]^2 + [y'(t)\,\mathrm{d}t]^2}$$

$$= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$$

3.3 Polarform

$k\colon r = f(\varphi)$



Mit Hilfe der Beziehung:

$$x(\varphi) = r \cdot \cos\varphi = f(\varphi) \cdot \cos\varphi$$
$$y(\varphi) = r \cdot \sin\varphi = f(\varphi) \cdot \sin\varphi$$

können wir die Formel für Paramterfunktionen verwenden, wenn wir φ als Parameter t auffassen:

$$x'(\varphi) = f'(\varphi) \cdot \cos\varphi - f(\varphi) \cdot \sin\varphi \qquad \text{(Produktregel)}$$
$$y'(\varphi) = f'(\varphi) \cdot \sin\varphi + f(\varphi) \cdot \cos\varphi \qquad \text{(Produktregel)}$$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi = \cdots = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

4 Anwendung: Substitutionsregel(n) der Integration

4.1 Substitution 1. Art

Integrand vereinfachen

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{d}u \qquad (\mathrm{d}u = u'(x) \cdot \mathrm{d}x)$$

Beispiel

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = ?$$

Substitution: $u = x^2 + 1$ (u als Funktion von x)

Differenzial bestimmen und nach $\mathrm{d}x$ auflösen:

$$\mathrm{d}u = 2x \cdot \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{2x} \cdot \mathrm{d}u$$

Wähle die Substitution so, dass deren Ableitung (bis auf einen konstanten Faktor) den übrigen Integranden ausmacht.

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{x}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u = \int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 u^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot u^{\frac{1}{2}}\Big|_{u=1}^{u=2} = \sqrt{u}\Big|_{u=1}^{u=2} = \sqrt{2}-1$$

Falls man „nur“ an einer Stammfunktion interessiert ist, macht man in der Stammfunktion für die Funktion u die Substitution wieder rückgängig:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \cdots = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+1} + C$$

4.2 Substitution 2. Art

Substitition der Integrationsvariablen

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $x = x(t) = \sin t$

Differenzial: $\mathrm{d}x = \cos t \cdot \mathrm{d}t$

Grenzen: Damit x $[-1,1]$ durchläuft, muss t $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ durchlaufen.

$$\ldots = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{\cos^2 t}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos t}{|\cos t|}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t \quad (0 \le \cos t \le 1 \text{ für } -\tfrac{\pi}{2} \le t \le \tfrac{\pi}{2})$$

$$= [t]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi/2 - (-\pi/2) = \pi$$