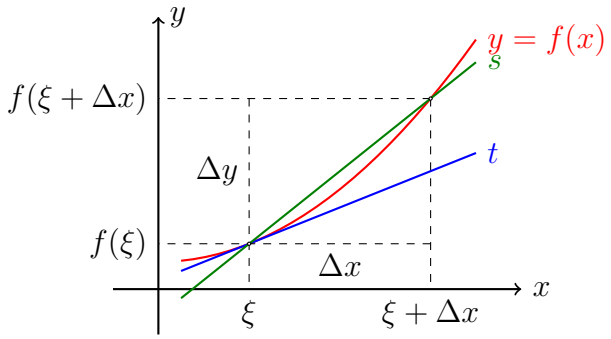
AM1: Das Differenzial

1 Einführung



Wir setzen voraus, dass f eine an der Stelle ξ [sprich xi] differenzierbare Funktion ist.

Mit φ bezeichnen wir die Differenz zwischen dem Differenzen- und dem Differenzialquotienten. Geometrisch entspricht dies dem Unterschied zwischen der Sekanten- und der Tangentensteigung.

Für eine bestimmte Stelle ξ hängt diese Differenz von Δx ab. Daher fassen wir φ als eine Funktion $\varphi(\Delta x)$ auf.

2 Ableitungsregeln in Differenzial-Schreibweise

- $\mathrm{d}(f \pm g) =$
- $\mathrm{d}(c \cdot f) =$
- $\mathrm{d}(f \cdot g) =$

- $\mathrm{d}\left(\dfrac{f}{g}\right) =$

- $\mathrm{d}f\big(g(x)\big) =$

Beispiele

(a) $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow$

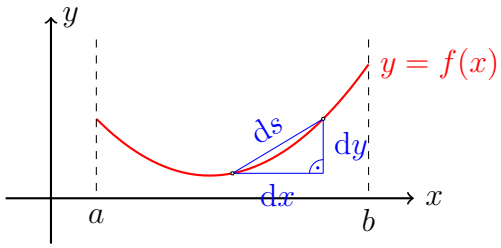
(b) $g(x) = \sin x \quad \Rightarrow$

(c) $x(t) = \mathrm{e}^t \quad \Rightarrow$

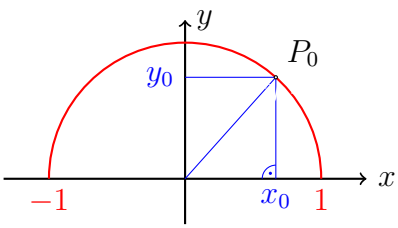
(d) $z(x) = \cos(4x) \quad \Rightarrow$

3 Anwendung: Bogenlänge einer Kurve

3.1 explizite Funktion: $y = f(x)$



Beispiel: Länge des Einheits-Halbkreises

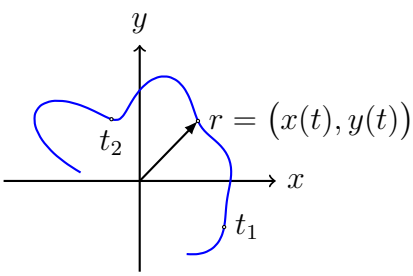


Bemerkung

Bogenlängen-Integrale können kompliziert werden $\rightarrow$ TR

3.2 Parameterform

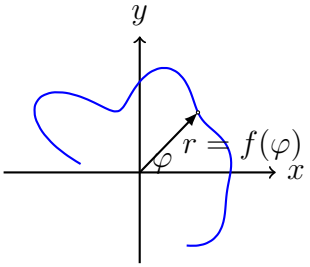
$k\colon \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$



Satz des Pythagoras für die Differenziale:

3.3 Polarform

$k\colon r = f(\varphi)$



Mit Hilfe der Beziehung:

$$x(\varphi) = r \cdot \cos\varphi = f(\varphi) \cdot \cos\varphi$$
$$y(\varphi) = r \cdot \sin\varphi = f(\varphi) \cdot \sin\varphi$$

können wir die Formel für Paramterfunktionen verwenden, wenn wir φ als Parameter t auffassen:

4 Anwendung: Substitutionsregel(n) der Integration

4.1 Substitution 1. Art

Integrand vereinfachen

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{d}u \qquad (\mathrm{d}u = u'(x) \cdot \mathrm{d}x)$$

Beispiel

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = ?$$

Falls man „nur“ an einer Stammfunktion interessiert ist, macht man in der Stammfunktion für die Funktion u die Substitution wieder rückgängig:

4.2 Substitution 2. Art

Substitition der Integrationsvariablen

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \dots$$

Substitution: $x = x(t) = \sin t$

Differenzial: $\mathrm{d}x = \cos t \cdot \mathrm{d}t$

Grenzen: Damit x $[-1, 1]$ durchläuft, muss t $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ durchlaufen.

$$\begin{aligned}
\dots &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{\cos^2 t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos t}{|\cos t|}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t \quad (0 \leq \cos t \leq 1 \text{ für } -\tfrac{\pi}{2} \leq t \leq \tfrac{\pi}{2}) \\
&= [t]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi/2 - (-\pi/2) = \pi
\end{aligned}$$