

Differenzialgleichungen

Theorie

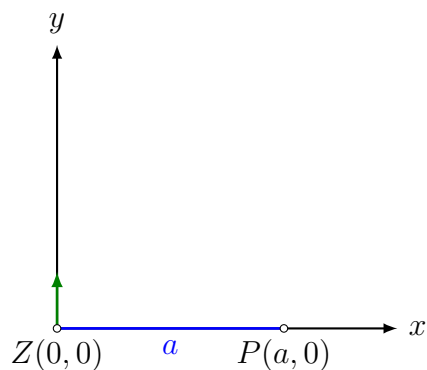
Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
2	Grundbegriffe	8
3	Das Richtungsfeld	12
4	Numerische Lösungsverfahren	13
5	Die lineare DGL 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten	17
5.1	Das Fundamentalsystem einer DGL	17
5.2	Der homogene Fall	18
5.3	Der inhomogene Fall	23
5.4	Anwendungen	26
6	Separation der Variablen	31
7	Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung	34
7.1	Lösung der homogenen linearen DGL	34
7.2	Lösung der inhomogenen linearen DGL	34
8	Systeme von Differenzialgleichungen	39
8.1	Reduktion der Ordnung einer DGL	39
8.2	Die Methode von Runge und Kutta für Systeme von Differenzialgleichungen 1. Ordnung	40
8.3	Lösen einer Differenzialgleichung 3. Ordnung	42
8.4	Das Räuber-Beute-Modell von Volterra-Lotka	43
8.4.1	Graphische Darstellung in der Phasenebene	44
8.5	Konkurrierende Spezies	45

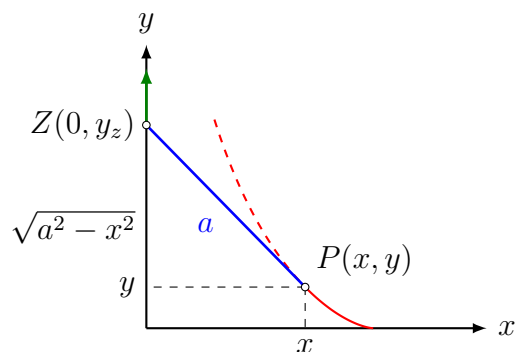
1 Einführung

Beispiel 1.1 (Traktrix)

In der xy -Ebene befindet sich in $P(a, 0)$ ein reibungsfrei beweglicher Massenpunkt und ist durch eine straff gespannte Schnur der Länge a mit dem Zugpunkt $Z(0, 0)$ verbunden.



Wird der Zugpunkt Z in positive y -Richtung verschoben, so bewegt sich P entlang einer Kurve, die *Traktrix* (Schleppkurve) genannt wird.



$$y'(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

$$\text{Lösung: } y(x) = a \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

Anfangsbedingung: $y(a) = 0$

$$a \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - a^2}}{a} \right) - \sqrt{a^2 - a^2} + C = 0$$

$$a \ln \left(\frac{a}{a} \right) + C = 0$$

$$a \ln 1 - C = 0$$

$$C = 0$$

Beispiel 1.2 (Exponentielles Wachstum)

Bakterienpopulation zum Zeitpunkt t : $P(t)$

Wachstumsgesetz?

$$\Delta P(t) = \alpha \cdot P(t) \cdot \Delta t$$

(Wachstum proportional zum aktuellen Bestand und zur Zeitspanne)

$$\frac{\Delta P(t)}{\Delta t} = \alpha \cdot P(t) \quad || \lim_{\Delta t \rightarrow 0}$$

$$\dot{P}(t) = \alpha \cdot P(t) \quad (\text{DGL})$$

Lösungsansatz: $P(t) = Ce^{\alpha t}$

Ansatz testen:

$$\dot{P}(t) = \alpha P(t)$$

$$Ce^{\alpha t} \cdot \alpha = \alpha \cdot Ce^{\alpha t}$$

$$\alpha Ce^{\alpha t} = \alpha Ce^{\alpha t} \quad \forall t \geq 0$$

Konstante durch Anfangsbedingung $P(0) = P_0$ bestimmen

$$P(0) = C \cdot e^{\alpha \cdot 0} = C \cdot 1 = C$$

Also: $\boxed{P(t) = P_0 e^{\alpha t}}$ (α : Wachstumskonstante)

Verdoppelungszeit:

$$P(t + \delta) = 2P(t)$$

$$P_0 e^{\alpha(t+\delta)} = 2P_0 e^{\alpha t}$$

$$e^{\alpha t} \cdot e^{\alpha \delta} = 2e^{\alpha t}$$

$$e^{\alpha \delta} = 2$$

$$\alpha \cdot \delta \ln 2$$

$$\delta = \frac{\ln 2}{\alpha}$$

Asymptotisches Wachstum:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_0 e^{\alpha t} = \infty \quad (\text{unrealistisch!})$$

H. Heuser kommentiert in seinem Lehrbuch „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ (1989, Teubner) den obigen Vorgang wie folgt:

«Wir können bereits an diesem Beispiel sehen, warum Differentialgleichungen eine so beherrschende Rolle bei der Beschreibung von Naturvorgängen spielen. Das entscheidende Faktum ist, dass wir häufig in der Lage sind, uns realitätsnahe Vorstellungen über den Verlauf eines Vorgangs „im kleinen“ zu machen, und zwar deshalb, weil wir, zugespitzt formuliert, „im kleinen“ davon absehen dürfen, *dass eine Änderung selbst eine Änderung bewirkt*. Bei der Beziehung

$$\Delta P(t) = \alpha \cdot P(t) \cdot \Delta t$$

berücksichtigen wir z. B. nicht, dass die innerhalb der Zeitspanne Δt entstehenden Bakterien ihrerseits zum Wachstum der Population beitragen. Diese Vorstellungen über den Verlauf des Vorgangs „im kleinen“ führen nun nach einem auf der Hand liegenden Grenzprozess sofort zu einer Differentialgleichung, der mathematischen Kristallisation naturwissenschaftlicher Überlegungen. Die *Auflösung* dieser Gleichung fällt dann ganz in die Domäne der Mathematik. Aus diesem Zusammenspiel naturwissenschaftlicher Argumentation „im kleinen“ und mathematischer Technik entsteht so das Gesetz des Vorgangs „im grossen“ des *Gesamtvorgangs*. Die Mathematik liefert gewissermassen das Verfahren, diesen Gesamtvorgang aus den winzigen Teilvorgängen in die ihn der Naturwissenschaftler gedanklich zerstückelt hatte, wiederherzustellen, zu „integrieren“ (lat. integrare = wiederherstellen). Deshalb sagt man auch, man *integriere* eine Differentialgleichung (statt zu sagen, man *löse* sie), und nennt eine Lösung auch ein *Integral*, obwohl das Integralzeichen \int dabei nicht aufzutauchen braucht.

Diese Überlegungen bieten der Kritik allerdigns sofort eine offene Flanke dar. Bei der Beschreibung des Vorgangs im kleinen vernachlässigt der Naturwissenschaftler nämlich gewisse Einflüsse, er „idealisiert“. Wenn er dabei die Grenze des Erträglichen überschreitet, so wird seine Differentialgleichung nicht mehr ein getreues „Modell“ des Vorgangs im kleinen sein, und ihre Integration wird dann auch keine zutreffende Beschreibung des Vorgangs im grossen liefern können. Überdies schleicht sich eine weitere Idealisierung dadurch ein, dass wir stillschweigend annehmen, der Vorgang könne durch eine *differenzierbare* Funktion dargestellt werden (ohne diese Annahme ist ja der Versuch, seine Differentialgleichung aufzustellen, von vornherein sinnlos). Aber nicht jeder Vorgang lässt sich exakt durch eine differenzierbare Funktion beschreiben! Die reale Populationsfunktion $P(t)$ ist z. B. ihrer Natur nach nur *ganzzahliger* Werte fähig und daher nicht differenzierbar. Von der der Formel

$$P(t) = P_0 e^{\alpha t}$$

darf man deshalb von vornherein nur eine *approximative* Beschreibung der wahren Populationsgrösse erwarten.

Aus all diesen Gründen wird sich der Naturwissenschaftler nicht damit begnügen, eine Differentialgleichung aufzustellen und ihre Lösung aus den Händen des Mathematikers entgegenzunehmen. Er wird vielmehr prüfen müssen, ob diese Lösung hinreichend gut mit der Wirklichkeit, d. h. mit seinen Messwerten, übereinstimmt. Ist dies nicht der Fall, so wird er die Differentialgleichung nicht als ein angemessenes mathematisches Modell des Vorgangs ansehen dürfen und wird die Überlegungen, die zu ihr geführt haben, *verfeinern* oder auch ganz verwerfen müssen: „Durch die Experientz kann man also leicht determinieren, welche Theorie mit der Wahrheit übereinkommt“ (Euler). »

Beispiel 1.3 (logistisches Wachstum)

Mit einem Wachstungsfaktor c und einer Kapazitätsgrenze $G > 0$ für die Population $P(t)$ erhalten wir die *logistische DGL*:

$$\frac{dP(t)}{dt} = cP(t)[G - P(t)]$$

Lösung (FTB, S. 67):

$$P(t) = \frac{G}{1 + aGe^{-cGt}}$$

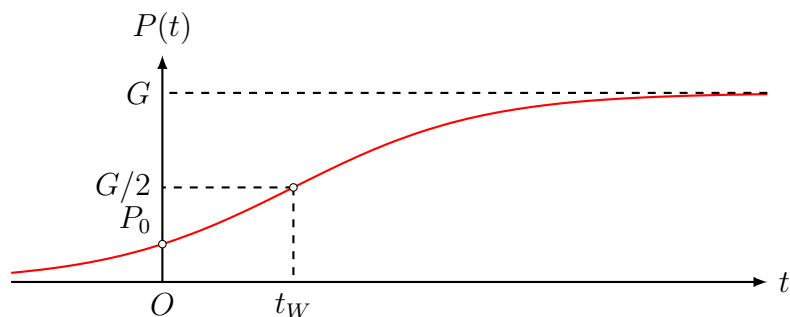
Die Konstante a kann durch eine Anfangsbedingung $P(0) = P_0$ bestimmt werden.

Asymptotisches Verhalten

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \frac{G}{1 + aG \cdot 0} = G$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} P(t) = \frac{G}{1 + aG \cdot \infty} = 0$$

Graph



Wann nimmt die Zunahme ab? (Wendestelle?)

$$\dot{P} = cP(G - P) \quad (\text{DGL})$$

$$\ddot{P} = c\dot{P}(G - P) + cP(0 - \dot{P})$$

$$0 = c\dot{P}(G - P) + cP(0 - \dot{P})$$

$$0 = \dot{P}(G - P) - P\dot{P}$$

$$0 = \dot{P}(G - 2P) \quad (\dot{P} > 0)$$

$$0 = G - 2P$$

Nach Erreichen der halben Kapazitätsgrenze: $P(t) = \frac{1}{2}G$

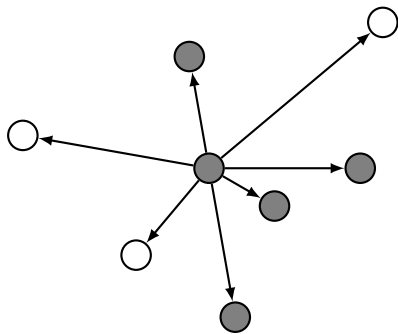
Beispiel 1.4 (Verbreitung von Gerüchten)

Gegeben: menschliche Population der festen Grösse N

Mundpropaganda: Informationsverbreitung nur durch Personen

$I(t)$: Anzahl der zur Zeit t informierten Personen

k : Anzahl Kontakte einer Person pro Zeiteinheit mit anderen



Bruchteil der *Nichtinformierten* zum Zeitpunkt t :

$$\frac{N - I(t)}{N}$$

Anzahl der nichtinformierten Personen, die in einer kleinen Zeitspanne dt durch *eine* Person informiert werden:

$$k \cdot \frac{N - I(t)}{N} \cdot dt$$

Änderungsrate der Informierten:

$$dI(t) = I(t) \cdot k \cdot \frac{N - I(t)}{N} \cdot dt$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = I(t) \cdot k \cdot \frac{N - I(t)}{N}$$

$$I'(t) = k \cdot I(t) - \frac{k}{N} \cdot I^2(t) = \frac{k}{N} \cdot I(t)(N - I(t))$$

Lösung (FTB S. 67):

$$I(t) = \frac{N}{1 + aNe^{-kt}}$$

a kann durch einen Anfangswert $I(0) = I_0$ bestimmt werden.

2 Grundbegriffe

Partielle Ableitungen

Ist

$$z = f(x, y) = -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + 2x + 2y + 4$$

eine Funktion in den Variablen x und y , so ist die *partielle Ableitung von f bezüglich x [bzw. y]* die „gewöhnliche“ Ableitung von f nach der Variablen x [bzw. y],

Partielle Ableitungen

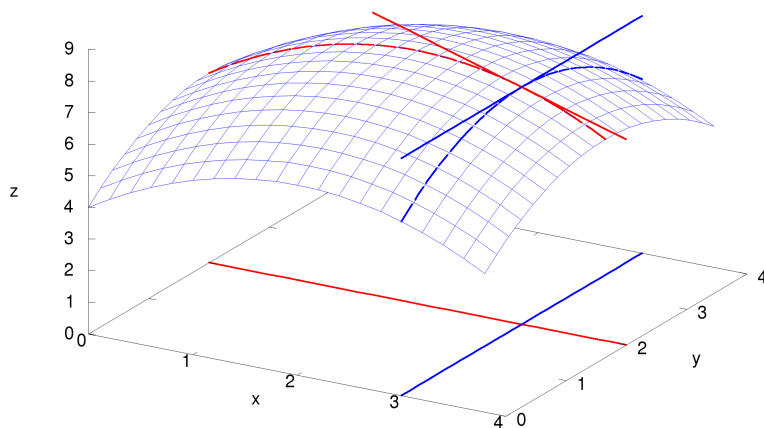
während die Variable y [bzw. x] als Konstante betrachtet wird.

Konkret:

- $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -x + 2$
- $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -y + 2$

Geometrische Deutung

Graph der Funktion $z = f(x, y) = -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + 2x + 2y + 4$



Steigung der Tangente in $P(3, 2)$ in Richtung von x :

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(x, y) = (3, 2)} = -3 + 2 = -1$$

Beispiele partieller Ableitungen

Gegeben: $y(t, x) = 3t^2x + t \sin x$

- $\frac{\partial y}{\partial t} = 6tx + \sin x$
- $\frac{\partial y}{\partial x} = 3t^2 + t \cos x$
- $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (6tx + \sin x) = 6t + \cos x$
- $\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial t} (3t^2 + t \cos x) = 6t + \cos x$
- $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (6tx + \sin x) = 6x$

Gewöhnliche und partielle Differenzialgleichungen

1. $y'' + y' = xy + 2$ **gewöhnliche DGL**
2. $\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = y$ **partielle DGL**
3. $\frac{\partial^2 y(x_1, x_2)}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 y(x_1, x_2)}{\partial^2 x_2} = 0$ **partielle DGL**
4. $(2y')^2 - \frac{x}{y'} = \sin(x)$ **gewöhnliche DGL**

Partielle Differenzialgleichungen müssen nur als solche erkannt werden; sie werden hier im Unterricht aber nicht behandelt.

Die folgenden Begriffe beziehen sich auf *gewöhnliche* DGL.

Wenn nichts anderes steht, ist $y = y(x)$ eine Funktion von x .

Die Ordnung einer Differenzialgleichung

1. $y'' + y' = xy + 2$ **Ordnung 2**
2. $t \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + x \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = y$ **Ordnung 1**
3. $y + 2xy'' - (y^{(4)})^2 = 3x$ **Ordnung 4**
4. $\frac{\partial^2 y(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3 y(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3 \partial x_2 \partial x_1}$ **Ordnung 3**

Ordnung: maximal auftretende (partielle) Ableitung

Homogene und inhomogene Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x$ inhomogene DGL
2. $y''' + 2y'' + 3y^2 = 0$ homogene DGL
3. $3y''' - 5y'' = xy'$ homogene DGL
4. $2y'' - yy' = 4$ inhomogene DGL
5. $yy'' - x + 1 = 0$ inhomogene DGL

homogen: *nur* Summanden, die mindestens einen Faktor mit y oder y' oder $y'' \dots$ enthalten.

Lineare und nichtlineare Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$ lineare DGL
2. $y''' + 2y'' + 3y^2 = 4x$ nichtlineare DGL
3. $2y''' - 5y'' - xy' = \sin x$ lineare DGL
4. $2y'' - yy' = 0$ nichtlineare DGL
5. $2y'' - xy' = 0$ lineare DGL
6. $1/y' + 3y = 1$ nichtlineare DGL
7. $\sqrt{x}y^{(4)} + 2y'x^{-1} = y \cos(x) + 2$ lineare DGL

DGL ist nichtlinear, sobald y oder y' oder y'' , ... „nichtlinear“ ist.

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Der Ausdruck „mit konstanten Koeffizienten“ wird hier nur im Zusammenhang mit linearen Differenzialgleichungen verwendet.

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$ lin. DGL mit konst. Koeff.
2. $y'' + 4y' - 5xy = e^x$ lin. DGL
3. $2y''' - 5y'' = y' - \sqrt{3}y + x^2$ lin. DGL mit konst. Koeff.
4. $\frac{1}{x} \cdot y' - 7y = 2x$ lin. DGL

konstante Koeffizienten: sobald vor y und y' und y'' , ... Konstanten stehen.

Explizite Differenzialgleichungen

1. $y''' = 2y'' - 3y + 4x + 1$ explizite DGL
2. $y''' - 2y'' + 3y = 4x + 1$ keine explizite DGL
3. $y'' = y' + y''' + x^2$ keine explizite DGL
4. $y^{(4)} = 2y''' \cdot 3y''$ explizite DGL

explizit: DGL ist nach der höchsten Ableitung aufgelöst.

Der Begriff der Differenzialgleichung

Eine Differenzialgleichung n -ter Ordnung hat die Form

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Beispiel:

$$x^2 y'' - 4y' = e^y - 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{x^2 y'' - 4y' - e^y + 3}_{F(x, y, y', y'')} = 0$$

Die reellwertige Funktion $y(x)$ wird *Lösung* oder *Integral* der DGL auf dem Intervall I genannt, wenn sie n -mal differenzierbar ist und wenn

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

für alle $x \in I$ gilt.

- Eine Differenzialgleichung braucht keine Lösung zu haben. $((y')^2 + 1 = 0)$
- Eine Differenzialgleichung kann genau eine Lösung haben. $((y')^2 + y^2 = 0)$
- Im Allgemeinen hat eine Differenzialgleichung unendlich viele Lösungen (Lösungsschar).

Hat eine DGL n -ter Ordnung unendlich viele Lösungen, so können wir durch die Wahl der beim Lösen entstehenden $n - 1$ Integrationskonstanten eine spezielle Lösung herausfiltern (*Anfangswertproblem*).

3 Das Richtungsfeld

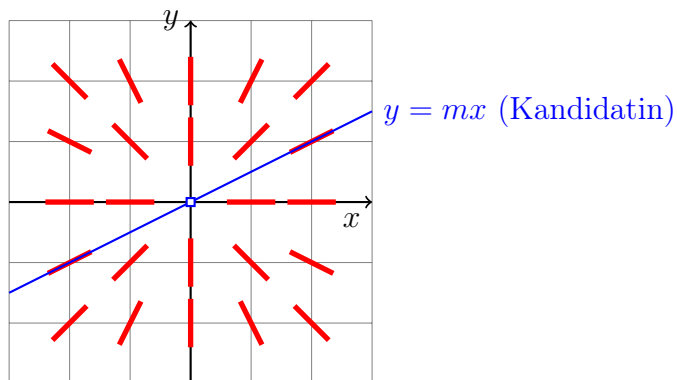
Das Linienelement

Sei $y' = f(x, y)$ eine explizite DGL 1. Ordnung

Dann entspricht y' der Steigung der Tangente an die (unbekannte) Lösungsfunktion im Punkt (x, y)

Beispiel 3.1

$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

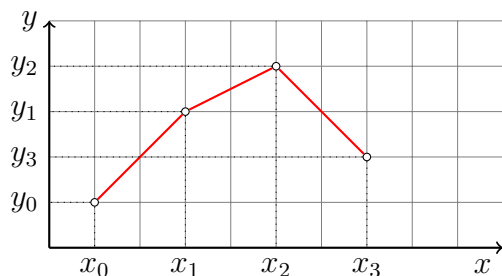
4 Numerische Lösungsverfahren

Der Euler-Cauchy Polygonzug

Gegeben: DGL $y' = f(x, y)$

$$y' = f(x, y) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \quad \text{für kleine } h > 0$$

$$\Rightarrow y(x+h) \approx y(x) + f(x, y)h$$



Das Verfahren von Euler

Es sei $y' = f(x, y)$ eine DGL mit dem Anfangswert (x_0, y_0) .

Berechnet man für eine Schrittweite $h > 0$ an den Stellen

$$x_k = x_0 + k \cdot h \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

die Werte

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

so stellen die y_k eine Näherung für die exakten Werte $y(x_k)$ dar. Diese Näherung wird umso genauer, je kleiner h gewählt wird.

Beispiel 4.1: $y' = y + x$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $h = 1$

$$x_0 = 0; y_0 = 0$$

$$x_1 = 1; y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h = 0 + (0 + 0) \cdot 1 = 0$$

$$x_1 = 2; y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h = 0 + (1 + 0) \cdot 1 = 1$$

$$x_2 = 3; y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)h = 1 + (2 + 1) \cdot 1 = 4$$

$$x_3 = 4; y_4 = y_3 + f(x_3, y_3)h = 4 + (3 + 4) \cdot 1 = 11$$

...

Implementierung in TI-84-Basic

PROGRAM:EULER

:Input "X0=",X

:Input "Y0=",Y

:Input "H=",H

:Input "N=",N

:N+1→dim(L₁)

:N+1→dim(L₂)

:For(K,1,N+1)

:X→L₁(K)

:Y→L₂(K)

:prgmDGL

:X+H→X

:Y+H*F→Y

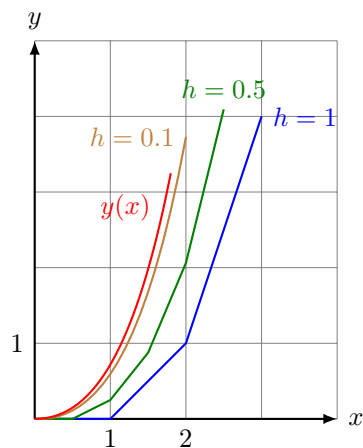
:End

DGL-Unterprogramm

PROGRAM:DGL

:X+Y→F

Grafische Darstellung



exakte Lösung der DGL $y' = x + y$: $y = e^x - x - 1$

Konvergenz (Euler)

$y' = x + y$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ mit der Lösung $y = e^x - x - 1$

x	y	$h = 1$	$h = 0.1$	$h = 0.01$	$h = 0.001$
0	0	0	0	0	0
1	0.718282	0	0.593742	0.704814	0.716924
2	4.38906	1	3.72750	4.31602	4.38168
3	16.0855	4	13.4494	15.7885	16.0555
4	49.5982	11	40.2593	48.5241	49.4891

Das Verfahren von Runge und Kutta

Wenn man die Steigung nicht nur im Punkt $f(x, y)$ sondern auch an benachbarten Stellen auswertet und diese Steigungen geeignet zu einer Durchschnittssteigung zusammenfasst, erhält man eine genauere Approximation des Kurvenverlaufs als beim Verfahren von Euler.

Eines dieser Verfahren stammt von CARL RUNGE (1856–1927) und WILHELM KUTTA (1867–1944) und lässt sich wie folgt beschreiben:

Ausgehend von einem Kurvenpunkt (x_i, y_i) berechnet man:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$$

$$k_3 = hf(x_i + h/2, y_i + k_2/2)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

Beispiel 4.2: $y' = x + y$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $h = 1$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 1 \cdot (0 + 0) = 0$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{1}{2}$$

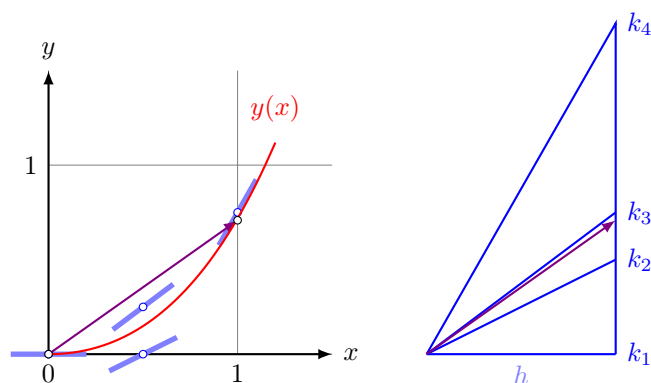
$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = 1 \cdot \left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{4}$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 1 = 1$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0 + \frac{1}{6} \cdot \frac{17}{4} = \frac{17}{24}$$

Visualisierung eines Iterationsschritts



Implementierung in TI-84-Basic

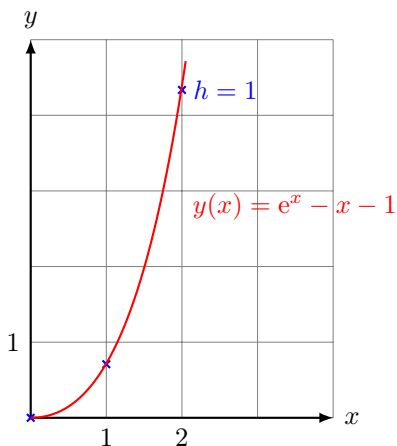
PROGRAM:RUNKUT

```

:Input "X0=",U           :U+H/2→X
:Input "Y0=",V           :V+A/2→Y
:Input "H=",H            :prgmDGL
:Input "N=",N            :H*F→B
:N+1→dim(L1)           :V+B/2→Y
:N+1→dim(L2)           :H*F→C
:For(K,1,N+1)            :U+H→X
:U→L1(K)                :V+C→Y
:V→L2(K)                :prgmDGL
:U→X                     :H*F→D
:V→Y                     :U+H→U
:prgmDGL                 :V+(A+2B+2C+D)/6→V
:H*F→A                   :End

```

Grafische Darstellung



Konvergenz (Runge–Kutta)

$y' = x + y$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ mit der Lösung $y = e^x - x - 1$

x	y	$h = 1$	$h = 0.1$	$h = 0.01$
0	0	0	0	0
1	0.718281828	0.708333333	0.718279744	0.718281828
2	4.38905610	4.33506944	4.38904477	4.38905610
3	16.0855369	15.8658130	16.0854907	16.0855369
4	49.5981500	48.8032438	49.5979826	49.5981500

Konvergenzordnung

Das Verfahren von Runge und Kutta hat die *Konvergenzordnung* $p = 4$. Grob gesagt bedeutet dies, dass sich bei einer Reduktion der Schrittweite mit dem Faktor k , der Fehler ungefähr mit dem Faktor k^4 verkleinert.

Zum Vergleich: Das Verfahren von Euler hat die Konvergenzordnung $p = 1$.

5 Die lineare DGL 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

5.1 Das Fundamentalsystem einer DGL

Lineare Unabhängigkeit

Zwei Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ werden *linear unabhängig* genannt, wenn für die reellen Konstante C_1 und C_2 die Gleichung

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \equiv 0$$

nur für $C_1 = C_2 = 0$ erfüllt ist.

Beispiele

(a) $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$: **linear unabhängig**

(b) $y_1(x) = x^3$ und $y_2(x) = 2x^3$: **linear abhängig**

(c) $y_1(x) = e^x$ und $y_2(x) = e^{-x}$: **linear unabhängig**

Wronski-Determinante

Zwei (einmal) differenzierbare Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ sind auf einem Intervall I linear unabhängig, wenn ihre *Wronski-Determinante*

$$W(y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

nicht für alle $x \in I$ verschwindet.

Beispiele

(a) $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0 \quad \text{linear unabhängig}$$

(b) $y_1(x) = x^3$ und $y_2(x) = 2x^3$:

$$\begin{vmatrix} x^3 & 2x^3 \\ 3x^2 & 6x^2 \end{vmatrix} = 6x^5 - 6x^5 \equiv 0 \quad \text{linear abhängig}$$

(c) $y_1(x) = e^x$ und $y_2(x) = e^{-x}$:

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^x e^{-x} - e^x e^{-x} = -2 \neq 0 \quad \text{linear unabhängig}$$

Satz 5.1 (Superpositionsprinzip)

Sind y_1 und y_2 Lösungen der homogenen linearen DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (1)$$

so ist für jede Wahl reeller Konstanten C_1 und C_2 die Funktion

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

eine Lösung von (1).

Beweis

Es seien y_1 und y_2 zwei Lösungen von (1) und C_1 bzw. C_2 zwei beliebige reelle Konstanten. Dann folgt aus der Linearität der Ableitung:

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= a(C_1y_1 + C_2y_2)'' + b(C_1y_1 + C_2y_2)' + c(C_1y_1 + C_2y_2) \\ &= aC_1y_1'' + aC_2y_2'' + bC_1y_1' + bC_2y_2' + cC_1y_1 + cC_2y_2 \\ &= C_1 \underbrace{(ay_1'' + by_1' + cy_1)}_0 + C_2 \underbrace{(ay_2'' + by_2' + cy_2)}_0 \\ &= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Satz 5.2 (Fundamentalsystem)

Jede homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (2)$$

hat eine Basis aus zwei Funktionen y_1, y_2 (*Fundamentalsystem*), so dass jede Lösung von (2) als Linearkombination

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

dargestellt werden kann. [ohne Beweis]

5.2 Der homogene Fall

Setzt man die Funktion $y = e^{\lambda x}$ und ihre Ableitungen

$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

in die DGL (2) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= 0 \\ a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} &= 0 \\ (a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} &= 0 \quad || : e^{\lambda x} \neq 0 \\ a\lambda^2 + b\lambda + c &= 0 \quad \text{charakteristische Gleichung} \end{aligned}$$

Da die Anzahl der Lösungen der charakteristischen Gleichung von der Diskriminante

$$D = b^2 - 4ac$$

abhängig ist, unterscheiden wir drei Fälle:

$$(1) D > 0: \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \in \mathbb{R} \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

$$(2) D = 0: \lambda_{1,2} = \frac{-b}{2a} \in \mathbb{R} \quad (\lambda_1 = \lambda_2)$$

$$(3) D < 0: \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \in \mathbb{C} \quad (\lambda_1 = \overline{\lambda_2})$$

Fall (1)

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -2$$

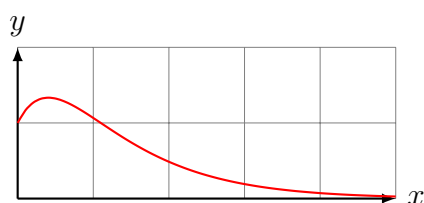
$$\text{Fundamentalsystem: } y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

$$\text{AWP: } y(0) = 1, y'(0) = 2$$

$$y'(x) = -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_1 + C_2 = 1 \\ y'(0) = -C_1 - 2C_2 = 2 \end{array} \right\} C_1 = 4, C_2 = -3$$

$$y(x) = 4e^{-x} - 3e^{-2x}$$



Fall (2)

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda + 2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$ kein Fundamentalsystem

Fundamentalsystem: $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}$

Nachweis: in den Übungen

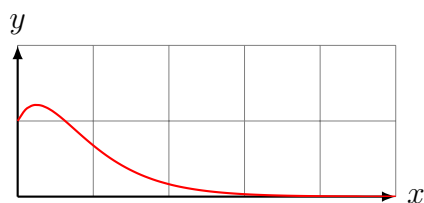
AWP: $y(0) = 1, y'(0) = 2$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}$$

$$y'(x) = C_2 e^{-2x} - 2(C_1 + C_2 x) e^{-2x} = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 x) e^{-2x}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_1 = 1 \\ y'(0) = C_2 - 2C_1 = 2 \end{array} \right\} C_1 = 1, C_2 = 4$$

$$y(x) = (1 + 4x) e^{-2x}$$



Fall (3)

$$y'' + 2y' + 17y = 0$$

charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 17 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 17}}{2} = -1 \pm 4i$$

$$\tilde{y}(x) = \tilde{C}_1 e^{(-1+4i)x} + \tilde{C}_2 e^{(-1-4i)x} \quad (\text{unschön})$$

pro memoria: $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
 $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

$$\tilde{y}_1(x) = e^{(-1+4i)x} = e^{-x} e^{i \cdot 4x} = e^{-x} (\cos 4x + i \sin 4x)$$

$$\tilde{y}_2(x) = e^{(-1-4i)x} = e^{-x} e^{i \cdot (-4x)} = e^{-x} (\cos 4x - i \sin 4x)$$

Superpositionsprinzip:

$$y_1(x) = \frac{1}{2i}(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) = e^{-x} \sin 4x$$

$$y_2(x) = \frac{1}{2}(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) = e^{-x} \cos 4x$$

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = e^{-x}(C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x)$$

$$\text{AWP: } y(0) = 1, y'(0) = 3$$

$$y(x) = e^{-x}(C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x)$$

$$\begin{aligned} y'(x) &= -e^{-x}(C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x) + e^{-x}(4C_1 \cos 4x - 4C_2 \sin 4x) \\ &= e^{-x}([-C_1 - 4C_2] \sin 4x + [4C_1 - C_2] \cos 4x) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= C_2 = 1 \\ y'(0) &= 4C_1 - C_2 = 3 \end{aligned} \right\} C_1 = 1, C_2 = 1$$

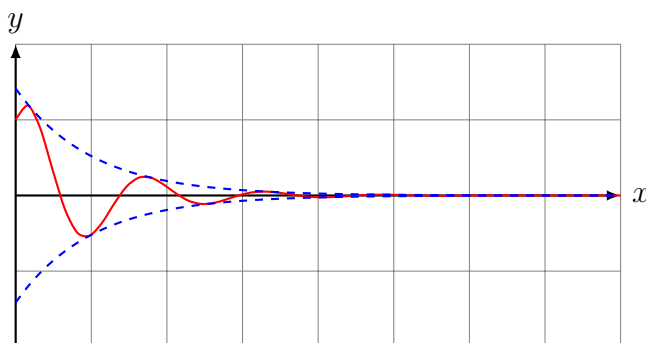
$$y(x) = e^{-x}(\cos 4x + \sin 4x)$$

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot \sin 4x + 1 \cdot \cos 4x &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 4x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 4x \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\sin 4x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos 4x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} \sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$y(x) = \sqrt{2} e^{-x} \sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right)$$

Graph von $y(x)$:



Zusammenfassung

Die Lösung einer homogenen linearen DGL mit konstanten Koeffizienten

$$ay'' + by' + cy = 0$$

mit der zugehörigen charakteristischen Gleichung

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

die durch λ_1 und λ_2 erfüllt wird, lautet:

- (1) $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, falls $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$
- (2) $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$, falls $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- (3) $y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x)$, falls $\lambda_1 = \alpha + i\beta = \bar{\lambda}_2 \in \mathbb{C}$

Im Fall (3) lässt sich der trigonometrisch Term anders darstellen:

Mit $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ gilt: $\left(\frac{C_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{C_2}{A}\right)^2 = 1$

Also existiert ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $\cos \varphi = \frac{C_1}{A}$ und $\sin \varphi = \frac{C_2}{A}$.

$$\begin{aligned} C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x &= A \left(\frac{C_1}{A} \sin \beta x + \frac{C_2}{A} \cos \beta x \right) \\ &= A(\cos \varphi \sin \beta x + \sin \varphi \cos \beta) \quad (\text{FBT S. 99}) \\ &= A \sin(\beta x + \varphi) \end{aligned}$$

Die beiden Konstanten C_1 und C_2 können daher alternativ auch als Amplitude A und Phasenwinkel φ bestimmt werden.

Analog würde man mit $\sin \varphi = C_1/A$ und $\cos \varphi = C_2/A$ sowie dem entsprechenden Additionstheorem die Lösungsform $y(x) = A \cos(\beta x + \varphi)$ erhalten.

5.3 Der inhomogene Fall

Das Lösungskonzept

Bei der inhomogenen DGL

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

bestimmt man wie im letzten Abschnitt die allgemeine Lösung $y_h(x)$ der zugehörigen homogenen DGL

$$ay'' + by' + cy = 0$$

und versucht anschliessend, *eine* Lösung $y_i(x)$ der inhomogenen DGL zu finden. Letztere wird auch *partikuläre* Lösung der inhomogenen DGL genannt. Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL besteht dann aus der Summe

$$y(x) = y_h(x) + y_i(x).$$

Methode der unbestimmten Koeffizienten

Die nun vorgestellte Methode hängt von der Struktur der Störfunktion $f(x)$ ab und kann nicht in jedem Fall angewendet werden. Sie besteht darin, dass man die richtige Lösung bis auf eine noch zu bestimmende Konstante errät.

Weitere Methoden, um inhomogene lineare Differenzialgleichungen zu lösen sind:

- Variation der Konstanten
- Laplace-Transformation
- Fourier-Transformation

Beispiel 5.3.1

$$y'' - 5y' + 6y = 10e^{4x}$$

(a) Lösung der homogenen DGL:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

(b) Lösung der inhomogenen DGL:

$$\text{Ansatz: } y = Ce^{4x}; y' = 4Ce^{4x}; y'' = 16Ce^{4x}$$

in die inhomogene DGL einsetzen:

$$\begin{aligned} y'' - 5y' + 6y &= 10e^{4x} \\ 16Ce^{4x} - 20Ce^{4x} + 6Ce^{4x} &= 10e^{4x} \\ 2Ce^{4x} &= 10e^{4x} \quad (\text{Koeffizientenvergleich}) \\ 2C &= 10 \quad \Rightarrow \quad C = 5 \end{aligned}$$

partikuläre Lösung: $y_i(x) = 5e^{4x}$

(c) Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$y(x) = y_h(x) + y_i(x) = \underbrace{C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}}_{y_h(x)} + \underbrace{5e^{4x}}_{y_i(x)}$$

Beispiel 5.3.2

$\ddot{y} + p\dot{y} + qy = A \cos \omega t$ (periodische Störfunktion \rightarrow Physik)

(a) Lösung der homogenen DGL:

$y_h(t)$ gemäss Formelsammlung auf S. 82 bestimmen

(b) Lösung der inhomogenen DGL:

Ansatz: $y(t) = U \sin \omega t + V \cos \omega t$

$$\dot{y}(t) = U\omega \cos \omega t - V\omega \sin \omega t$$

$$\ddot{y}(t) = -U\omega^2 \sin \omega t - V\omega^2 \cos \omega t$$

in die inhomogene DGL einsetzen:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + p\dot{y} + qy &= A \cos \omega t \\ -U\omega^2 \sin \omega t - V\omega^2 \cos \omega t \\ + pU\omega \cos \omega t - pV\omega \sin \omega t \\ + qU \sin \omega t + qV \cos \omega t &= A \cdot \cos \omega t + 0 \cdot \sin \omega t \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich: $-V\omega^2 + pU\omega + qV = A$

$$-U\omega^2 - pV\omega + qU = 0$$

$$p\omega U + (q - \omega^2)V = A$$

$$(q - \omega^2)U - p\omega V = 0$$

Substituiere $p\omega = a$ und $(q - \omega^2) = b$:

$$aU + bV = A \tag{3}$$

$$bU - aV = 0 \tag{4}$$

Addiere das a -fache von (3) zum b -fachen von (4):

$$a^2U + b^2U = aA$$

$$U = \frac{aA}{a^2 + b^2}$$

Subtrahiere das b -fache von (4) von dem a -fachen von (3):

$$b^2V + a^2V = bA$$

$$V = \frac{bA}{a^2 + b^2}$$

$$y_i(t) = A \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \cdot \sin \omega t + \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot \cos \omega t \right) \quad (5)$$

mit $a = p\omega$ und $b = q - \omega^2$

Da der Punkt

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

auf dem Einheitskreis liegt, existiert ein Winkel γ mit

$$\sin \gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{und} \quad \cos \gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Setzt man dies in (5) ein, erhält man mit dem entsprechenden Additionstheorem (S. 99)

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \frac{A}{\sqrt{a^2 + b^2}} (\sin \omega t \cos \gamma + \cos \omega t \sin \gamma) \\ &= \frac{A}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(\omega t + \gamma) \end{aligned}$$

mit $\tan \gamma = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \frac{a}{b}$

Ersetzen von γ durch $-\gamma$ liefert eine Cosinus-Darstellung von $y_i(t)$:

$$\begin{aligned} \sin(-\gamma) &= -\sin \gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \cos(-\gamma) &= \cos \gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Setzt man dies wieder in (5) ein, erhält man

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \frac{A}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-\sin \omega t \sin \gamma + \cos \omega t \cos \gamma) \\ &= \frac{A}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(\omega t + \gamma) \end{aligned}$$

mit $\tan(-\gamma) = \frac{\sin(-\gamma)}{\cos(-\gamma)} = \frac{a}{b}$

(c) Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_i(t) \\ &= y_h(t) + \frac{A}{\sqrt{p^2\omega^2 + (q - \omega^2)^2}} \cos(\omega t + \gamma) \end{aligned}$$

mit $\tan(-\gamma) = \frac{p\omega}{q - \omega^2}$ bzw. $\tan \gamma = \frac{p\omega}{\omega^2 - q}$

5.4 Anwendungen

Die DGL der freien ungedämpften Schwingung

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$

$$\lambda^2 = (\omega_0 i)^2$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \omega_0 i$$

Realteile von $\lambda_{1,2}$ sind null \Leftrightarrow keine Dämpfung

$$y(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t = C \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Die DGL der freien gedämpften Schwingung

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

$$D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2 = 4(\delta^2 - \omega_0^2) = -4 \underbrace{(\omega_0^2 - \delta^2)}_{\omega^2}$$

(1) $D > 0$ wenn $\delta > \omega_0$: *starke Dämpfung*

$$y(t) = C_1 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$$

(2) $D = 0$ wenn $\delta = \omega_0$: *kritische Dämpfung*

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\delta t}$$

(3) $D < 0$ wenn $\delta < \omega_0$: *schwache Dämpfung*

$$y(t) = C_1 e^{-\delta t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) = C e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Die DGL der erzwungenen gedämpften Schwingung

Wirkt auf ein gedämpftes schwingendes System eine periodische Störkraft, so führt dies auf folgende DGL:

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega^2 y = A \cos \omega_1 t$$

Da der homogene Teil $y_h(t)$ der Lösung durch die Dämpfung früher oder später verschwindet, dominiert nach einer gewissen Zeit die partikuläre Lösung:

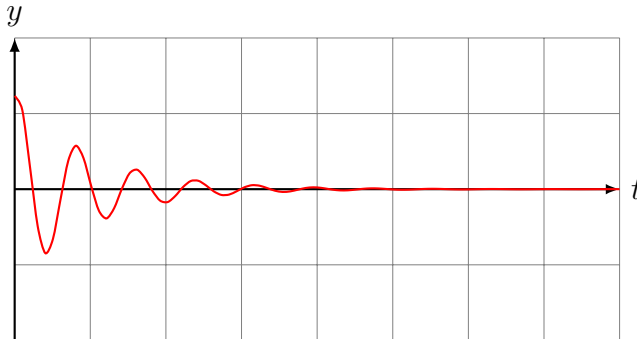
$$y(t) = y_h(t) + \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2 \omega_1^2}} \cos(\omega_1 t + \gamma) \quad (6)$$

Beispiel

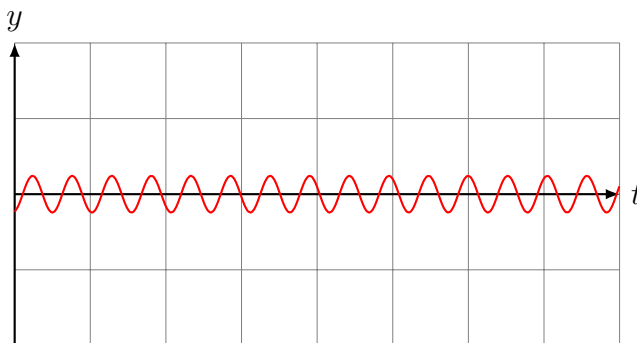
$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 65y = 20 \cos(12t); \quad y(0) = 1, \dot{y}(0) = 3$$

$$y(t) = e^{-x}(0.42 \sin 8t + 1.2 \cos 8t) + 0.07 \sin 12t - 0.23 \cos 12t$$

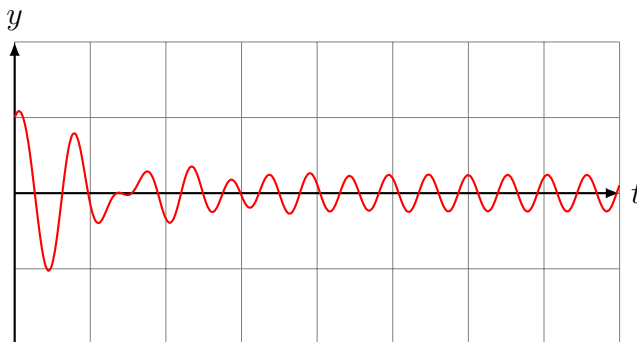
Graph von $y_h(x) = e^{-x}(0.42 \sin 8t + 1.2 \cos 8t)$:



Graph von $y_i(t) = 0.07 \sin 12t - 0.23 \cos 12t$:



Superposition: $y(t) = y_h(t) + y_i(t)$:



Die erzwungene ungedämpfte Schwingung ($\omega_0 \neq \omega_1$)

Für $\delta = 0$ und $\omega_1 \neq \omega_0$ ergibt sich DGL $\ddot{y} + \omega_0^2 y = A \cos \omega_1 t$. Damit wird (6) zu:

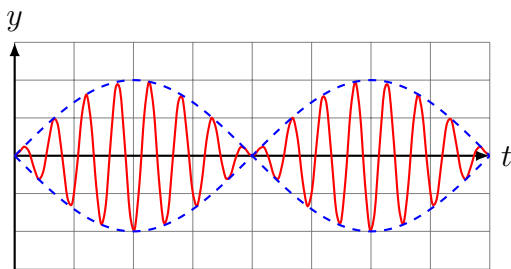
$$y(t) = \underbrace{C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t}_{y_h} + \underbrace{\frac{A}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t}_{y_i} \quad (7)$$

Für die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ und $\dot{y}(0) = 0$ erhält man $C_1 = -A/(\omega_0^2 - \omega_1^2)$ und $C_2 = 0$. Insgesamt:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{A}{\omega_0^2 - \omega_1^2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_0 t) \quad [\text{FBT S. 99}] \\
 &= \frac{2A}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \sin \frac{(\omega_0 + \omega_1)t}{2} \sin \frac{(\omega_0 - \omega_1)t}{2}
 \end{aligned} \tag{8}$$

Die Sinusfunktionen mit der kleineren Kreisfrequenz moduliert die Amplitude der Überlagerungsschwingung.

Beispiel mit $A = 60$, $\omega_0 = 16$ und $\omega_1 = 14$:



Die erzwungene ungedämpfte Schwingung ($\omega_1 = \omega_0$)

Für $\delta = 0$ und $\omega_1 = \omega_0$ ergibt sich DGL $\ddot{y} + \omega_0^2 y = A \cos \omega_0 t$. In diesem Fall können wir wegen der Division durch Null die Lösung (6) nicht mehr wiederverwenden.

Man kann aber zeigen (\rightarrow Übungen), dass die DGL von folgender Funktion gelöst wird:

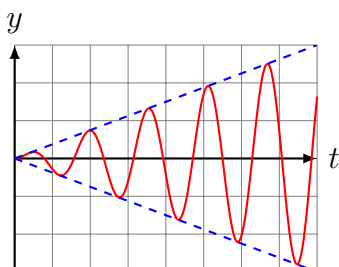
$$y(t) = \underbrace{C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t}_{y_h} + \underbrace{\frac{A}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t}_{y_i} \tag{9}$$

Diesmal erhält man aus der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ und $\dot{y}(0) = 0$ die Konstanten $C_1 = C_2 = 0$ und so:

$$y(t) = \frac{A}{2\omega_0} \cdot t \sin \omega_0 t \tag{10}$$

Der Faktor t verursacht ein lineares Anwachsen der Amplitude, was früher oder später zur Zerstörung des Oszillators führt.

Beispiel mit $A = 3$ und $\omega_0 = 4$:



Die erzwungene gedämpften Schwingung

Für die DGL der erzwungenen gedämpften Schwingung

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = A \cos \omega_1 t$$

haben wir in Abschnitt 5.3 die Lösung

$$y(t) = y_h(t) + \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}} \cos(\omega_1 t + \gamma) \quad (11)$$

hergeleitet. Man kann erkennen, dass die Amplitude

$$\frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}} \quad (12)$$

gross wird, wenn sowohl $\omega_0^2 - \omega_1^2$ als auch δ und ω_1^2 klein sind.

Genauer: Die Amplitude wird maximal, wenn der Radikand

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2$$

minimal wird. Im Resonanzfall gilt notwendigerweise:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega_1} [(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2] &= 0 \\ 2(\omega_0^2 - \omega_1^2) \cdot (-2\omega_1) + 4\delta^2 \cdot 2\omega_1 &= 0 \\ 4\omega_1 [\omega_1^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2] &= 0 \quad (\omega_1 \neq 0) \\ \omega_1^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2 &= 0 \\ \omega_1 = \omega_R &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \end{aligned} \quad (13)$$

Ein Maximum ω_R existiert jedoch nur, wenn $\delta < \omega_0/\sqrt{2}$ gilt.

Um das Verhalten der Amplitude (12) besser analysieren zu können, dividieren wir Zähler und Nenner durch ω_0^2 :

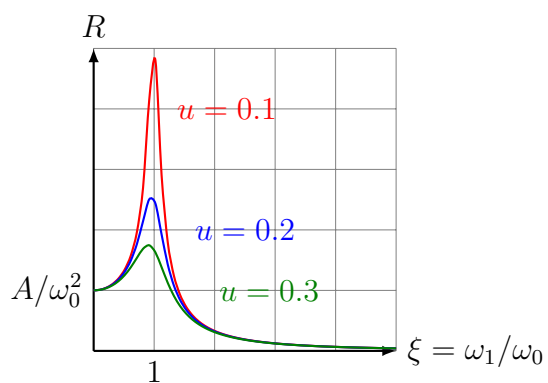
$$\frac{A/\omega_0^2}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right]^2 + 4\delta^2 \frac{\omega_1^2}{\omega_0^4}}}$$

Dann substituieren wir $\omega_1/\omega_0 = \xi$ und $\delta/\omega_0 = u$:

$$R_u(\xi) = \frac{A/\omega_0^2}{\sqrt{[1 - \xi^2]^2 + 4u^2\xi}}$$

Der (einheitenlose) Frequenzquotient ξ stellt ω_1 als Vielfaches von ω_0 dar. Ferner gilt $R_u(0) = A/\omega_0^2$.

Wählt man zusätzlich auf der y -Achse als Einheit A/ω_0^2 erhält man schliesslich die Resonanzfunktion $R_u(\xi)$, welche neben der Variablen $\xi = \omega_1/\omega_0$ nur noch den Parameter $u = \delta/\omega_0$ enthält.



Wie in (13) bestimmt man $\xi_{\max} = \sqrt{1 - 2u^2}$.

6 Separation der Variablen

Beispiel 6.1

$$y' = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{1}{y} \cdot dy = 1 \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{y} \cdot dy = \int 1 \cdot dx$$

$$\ln |y| = x + C_1 \quad (\text{eine Konstante genügt})$$

$$e^{|\ln y|} = e^{x+C_1} = e^x \cdot e^{C_1}$$

$$y = Ce^x \quad (\text{mit } C = e^{C_1})$$

Exponentialkurven

Beispiel 6.2

$$y' = -x/y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y \cdot dy = -x \cdot dx$$

$$\int y \cdot dy = - \int x \cdot dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$y^2 = 2C_1 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{C - x^2} \quad (\text{mit } C = 2C_1)$$

Halbkreise mit $M(0,0)$ und $r = \sqrt{C}$

Beispiel 6.3

$$y' = x + y$$

$$\frac{dy}{dx} = x + y \quad \text{keine Trennung möglich!}$$

Trick: Substitution $u = x + y$ (1)

$$u' = 1 + y' \Rightarrow y' = u' - 1 \quad (2)$$

Setze in die Original-DGL rechts (1) und links (2) ein:

$$u' - 1 = u \quad (\text{separierbar})$$

$$u' = u + 1$$

$$\frac{du}{dx} = u + 1$$

$$du = (u + 1) \cdot dx$$

$$\frac{1}{u + 1} du = 1 dx$$

$$\int \frac{1}{u + 1} du = \int 1 dx$$

$$\ln |1 + u| = x + C_1 \quad || \exp(\dots)$$

$$|1 + u| = e^{x+C_1} = e^x e^{C_1} = C_2 e^x \quad (C_2 = e^{C_1})$$

$$1 + u = \pm C_2 e^x = C e^x \quad (C = \pm C_2)$$

$$u = C e^x - 1$$

$$x + y = C e^x - 1$$

$$y = C e^x - x - 1$$

7 Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung

Allgemeine Form

Allgemeine Form der linearen DGL 1. Ordnung:

$$f(x) \cdot y' + g(x) \cdot y = h(x)$$

Diese Art von Differenzialgleichungen wird linear genannt, weil y' und y linear auftreten. Die Koeffizientenfunktionen $f(x)$ und $g(x)$ müssen jedoch nicht linear sein.

Normalform

Division durch $f(x)$ ergibt:

$$y' + \frac{g(x)}{f(x)} \cdot y = \frac{h(x)}{f(x)}$$

$$y' + u(x) \cdot y = v(x) \quad \text{Normalform}$$

$v(x)$ wird *Störfunktion* genannt.

Sind $h(x) \equiv 0$ bzw. $v(x) \equiv 0$, nennt man die lineare DGL *homogen*, sonst *inhomogen*.

7.1 Lösung der homogenen linearen DGL

Lösung der homogenen linearen DGL

$$y' + u(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -u(x)y$$

$$\frac{1}{y} dy = -u(x) dx \quad [\text{Separation der Variablen}]$$

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int u(x) dx$$

$$\ln y = -U(x) + K \quad [U \text{ ist Stammfunktion von } u]$$

$$y = e^{-U(x)+K} = e^{-U(x)} \cdot e^K$$

$$y_h = C \cdot e^{-U(x)} \quad \text{allg. Lsg. der hom. DGL}$$

7.2 Lösung der inhomogenen linearen DGL

Wir fassen in der Lösung y_h der homogenen DGL die Konstante C als Funktion $G(x)$ auf und versuchen $G(x)$ so zu wählen, dass die inhomogene DGL erfüllt wird. Deshalb wird diese Methode *Variation der Konstanten* genannt.

$$y_i = G(x) \cdot e^{-U(x)}$$

Den Lösungsansatz setzen wir in die *inhomogene* Gleichung ein und leiten ab:

$$y' + u(x)y = v(x)$$

$$\left[G(x) e^{-U(x)} \right]' + u(x) \cdot G(x) e^{-U(x)} = v(x)$$

$$G'(x) e^{-U(x)} - U'(x) G(x) e^{-U(x)} + u(x) G(x) e^{-U(x)} = v(x)$$

Wegen $U'(x) = u(x)$ gilt:

$$G'(x) e^{-U(x)} - u(x) G(x) e^{-U(x)} + u(x) G(x) e^{-U(x)} = v(x)$$

$$G'(x) e^{-U(x)} = v(x) \quad || \cdot e^{U(x)}$$

$$G'(x) = v(x) \cdot e^{U(x)}$$

$$G(x) = \int v(x) e^{U(x)} dx$$

Wir können hier die Integrationskonstante weglassen, da wir nur an einer speziellen Lösung interessiert sind.

Zur Erinnerung: $G(x)$ ist so beschaffen, dass die Funktion

$$y_i = G(x) \cdot e^{-U(x)} = \int v(x) e^{U(x)} dx \cdot e^{-U(x)}$$

eine Lösung der inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung ist. Also:

$$y(x) = y_h + y_i$$

$$= C e^{-U(x)} + \int v(x) e^{U(x)} dx \cdot e^{-U(x)}$$

$$= e^{-U(x)} \left[C + \int v(x) e^{U(x)} dx \right] \quad (\text{FTB S. 82})$$

Die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen DGL 1. Ordnung ist eine Summe aus der allgemeine Lösung y_h der homogenen DGL und einer speziellen Lösung y_i der inhomogenen DGL.

Beispiel 7.1

Bestimme die allgemeine Lösung der DGL $xy' + y = x^2$, ($x > 0$).

$$\text{Normalform: } y' + \frac{1}{x} \cdot y = x$$

$$u(x) = 1/x \quad \Rightarrow \quad U(x) = \ln x$$

$$y_h = C \cdot e^{-U(x)} = C \cdot e^{-\ln x} = C \cdot e^{\ln x^{-1}} = C \cdot x^{-1} = C/x$$

$$v(x) = x$$

$$\begin{aligned}
y_s &= \int v(x) \cdot e^{U(x)} dx \cdot e^{-U(x)} = \int x \cdot e^{\ln x} dx \cdot e^{-\ln x} \\
&= \int x^2 dx \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3}x^2 \\
y &= y_h + y_i = \frac{C}{x} + \frac{1}{3}x^2
\end{aligned}$$

Beispiel 7.2

Befindet sich ein Körper in einem Medium mit der konstanten Temperatur T_U , so ist seine (zeitliche) Temperaturänderung proportional zur Temperaturdifferenz.

Gesucht: Temperaturverlauf $T(t)$ für die Anfangstemperatur T_0 .

$$\text{DGL: } \dot{T} = -k(T - T_U) \quad \Rightarrow \quad \dot{T} + kT = kT_U \quad [U = U(t)]$$

$$u(t) = k \quad \Rightarrow \quad U(t) = kt$$

$$\text{Lösung der homogenen DGL: } T_h(t) = C e^{-U(t)} = C e^{-kt}$$

Störfunktion: $v(t) = kT_U$ (konstant)

$$G(t) = \int v(x) e^{U(x)} dx = \int kT_U e^{kt} dt = T_U e^{kt}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$T(t) = (G(x) + C) e^{-U(x)} = (T_U e^{kt} + C) e^{-kt} = T_U + C e^{-kt}$$

Anfangswert für $t = 0$: $T(0) = T_0$

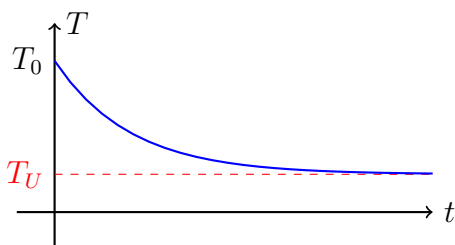
$$T_0 = T(0) = T_U + C$$

$$C = T_0 - T_U$$

$$T(t) = T_U + (T_0 - T_U) e^{-kt}$$

Asymptotisches Verhalten:

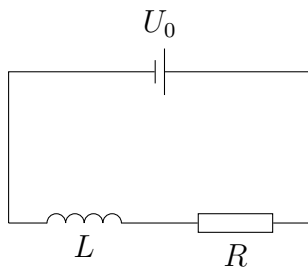
$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [(T_0 - T_U) e^{-kt} + T_U] = 0 + T_U = T_U$$



Bemerkung: Für Temperaturen in Kelvin wird $T(t)$ geschrieben; für Temperaturen in $^{\circ}\text{C}$ hingegen $\vartheta(t)$.

Beispiel 7.3

Im skizzierten Stromkreis



gilt nach Kirchhoff:

$$L \frac{dI}{dt} + R \cdot I = U_0$$

Normalform:

$$\dot{I} + \frac{R}{L} \cdot I = \frac{U_0}{L}$$

$$u(t) = \frac{R}{L} \Rightarrow U(t) = \frac{R}{L} \cdot t$$

Lösung der homogenen Gleichung:

$$I_h(t) = C e^{-U(t)} = C e^{-\frac{R}{L}t}$$

Störfunktion:

$$v(t) = U_0/L \quad [\text{konstant!}]$$

$$\begin{aligned} G(t) &= \int v(t) e^{U(t)} dt = \frac{U_0}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} dt \\ &= \frac{U_0}{L} \cdot \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} = \frac{U_0}{R} e^{\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} I(t) &= (G(x) + C) e^{-U(x)} = \left(\frac{U_0}{R} e^{\frac{R}{L}t} + C \right) e^{-\frac{R}{L}t} \\ &= \frac{U_0}{R} + C e^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$

Anfangswertproblem (AWP):

Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll kein Strom fließen: $I_0 = I(0) = 0$

$$I_0 = I(0) = \frac{U_0}{R} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{U_0}{R}$$

Lösung des AWP:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

Beispiel 7.4

Bewegt sich eine Kugel in einer zähen Flüssigkeit, so ist die Widerstandskraft nach Stokes proportional zur Geschwindigkeit.

Für die Sinkgeschwindigkeit der Kugel infolge ihres Gewichts erhält man nach dem Newtonschen Grundgesetz die Bewegungsgleichung:

$$m \cdot a = F$$

$$m \cdot a = F_G - F_R$$

$$m \cdot \dot{v} = m \cdot g - c \cdot v$$

$$m \cdot \dot{v} = m \cdot g - c \cdot v$$

$$\dot{v} + \frac{c}{m}v = g \quad \text{Normalform}$$

$$u(t) = \frac{c}{m} \quad \Rightarrow \quad U(t) = \frac{c}{m} \cdot t$$

Lösung der homogenen Gleichung: $v_h = C e^{-\frac{c}{m}t}$

Störfunktion: $v(t) = g$ [konstant]

$$G(t) = \int v(t) e^{U(t)} dt = g \int e^{\frac{c}{m}t} dt = \frac{gm}{c} \cdot e^{\frac{c}{m}t}$$

Allgemeine Lösung:

$$v(t) = (G(x) + C) e^{-U(x)} = \left(\frac{gm}{c} e^{\frac{c}{m}t} + C \right) e^{-\frac{c}{m}t} = \frac{gm}{c} + C e^{-\frac{c}{m}t}$$

Anfangswertproblem (AWP):

$$t = 0 \Rightarrow v(0) = v_0 = 0 \quad (\text{Kugel ohne Anfangsgeschwindigkeit})$$

$$v_0 = v(0) = \frac{gm}{c} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{gm}{c}$$

Lösung des AWP:

$$v(t) = \frac{gm}{c} - \frac{gm}{c} e^{-\frac{c}{m}t} = \frac{gm}{c} (1 - e^{-\frac{c}{m}t})$$

8 Systeme von Differentialgleichungen

8.1 Reduktion der Ordnung einer DGL

Merke: Eine Differentialgleichung n -ter Ordnung lässt sich immer auf ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen.

Beispiel 1

Gegeben ist eine (nichtlineare) Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$y''' - x \cdot y'' + (y')^2 - 3 \cdot y = \sin x$$

Zuerst löst man nach dem Term mit der höchsten Ableitung auf

$$y''' = x \cdot y'' - (y')^2 + 3 \cdot y + \sin x \quad (*)$$

Dann definiert man

$$\begin{aligned} y &= y_1 \\ y' &= y_1' = y_2 \\ y'' &= y_2' = y_3 \\ &\dots = \dots \\ y^{(n-1)} &= y_{n-1}' = y_n \end{aligned}$$

und ersetzt in der nach $y^{(n)}$ aufgelösten expliziten DGL die rechte Seite durch die obigen Terme:

$$\begin{aligned} y &= y_1 \\ y' &= y_1' = y_2 \\ y'' &= y_2' = y_3 \\ y''' &= y_3' = x \cdot y_3 - y_2^2 + 3 \cdot y_1 + \sin x \quad (*) \end{aligned}$$

Auf diese Weise erhalten wir ein System n Differentialgleichungen *erster* Ordnung:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= x \cdot y_3 - y_2^2 + 3 \cdot y_1 + \sin x \end{aligned}$$

Beispiel 2

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' = 3y' - 2y$$

$$\begin{aligned} y &= y_1 \\ y' &= y_1' = y_2 \\ y'' &= y_2' = 3y_2 - 2y_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= 3y_2 - 2y_1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

8.2 Die Methode von Runge und Kutta für Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung

Um Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung – und somit auch Differentialgleichungen der Ordnung $n \geq 2$ zu lösen, wenden wir das klassische Verfahren von Runge und Kutta an.

Die einzige Änderung besteht darin, dass bei jedem Iterationsschritt gleichzeitig mehrere Differentialgleichungen berücksichtigt werden.

Wir beschränken uns auf ein System aus drei DGL erster Ordnung:

$$x' = f_1(t, x, y, z)$$

$$y' = f_2(t, x, y, z)$$

$$z' = f_3(t, x, y, z)$$

Man beachte, dass die unabhängige Variable jetzt t (statt x) heisst.

Die vier Zwischenschritte des Runge-Kutta-Verfahrens müssen für jede DGL einzeln ausgeführt werden:

$$k_{1,1} = f_1(t_n, x_n, y_n, z_n)$$

$$k_{1,2} = f_2(t_n, x_n, y_n, z_n)$$

$$k_{1,3} = f_3(t_n, x_n, y_n, z_n)$$

$$k_{2,1} = f_1\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_{1,1}, y_n + \frac{h}{2}k_{1,2}, z_n + \frac{h}{2}k_{1,3}\right)$$

$$k_{2,2} = f_2\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_{1,1}, y_n + \frac{h}{2}k_{1,2}, z_n + \frac{h}{2}k_{1,3}\right)$$

$$k_{2,3} = f_3\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_{1,1}, y_n + \frac{h}{2}k_{1,2}, z_n + \frac{h}{2}k_{1,3}\right)$$

$$k_{3,1} = f_1\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_{2,1}, y_n + \frac{h}{2}k_{2,2}, z_n + \frac{h}{2}k_{2,3}\right)$$

$$k_{3,2} = f_2\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_{2,1}, y_n + \frac{h}{2}k_{2,2}, z_n + \frac{h}{2}k_{2,3}\right)$$

$$k_{3,3} = f_3\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_{2,1}, y_n + \frac{h}{2}k_{2,2}, z_n + \frac{h}{2}k_{2,3}\right)$$

$$k_{4,1} = f_1(t_n + h, x_n + hk_{3,1}, y_n + hk_{3,2}, z_n + hk_{3,3})$$

$$k_{4,2} = f_2(t_n + h, x_n + hk_{3,1}, y_n + hk_{3,2}, z_n + hk_{3,3})$$

$$k_{4,3} = f_3(t_n + h, x_n + hk_{3,1}, y_n + hk_{3,2}, z_n + hk_{3,3})$$

Die nächsten Näherungswerte bestimmen:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2})$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6}(k_{1,3} + 2k_{2,3} + 2k_{3,3} + k_{4,3})$$

Die nächste Stelle bestimmen:

$$t_{n+1} = t_n + h$$

Der Programmcode

```
PROGRAM:RK4SYS
:Input "T0=",T
:Input "X0=",X
:Input "Y0=",Y
:Input "Z0=",Z
:Input "H=",H
:Input "N=",N
N+1→dim(LT)
N+1→dim(LX)
N+1→dim(LY)
N+1→dim(LZ)
3→dim(LK1)
3→dim(LK2)
3→dim(LK3)
3→dim(LK4)
T→LT(1)
X→LX(1)
Y→LY(1)
Z→LZ(1)
For(K,1,N)
LT(K)→T
LX(K)→X
LY(K)→Y
LZ(K)→Z
prgmDGLSYS
{A,B,C}→LK1
LT(K)+H/2→T
LX(K)+H/2*LK1(1)→X
LY(K)+H/2*LK1(2)→Y
LZ(K)+H/2*LK1(3)→Z
prgmDGLSYS
{A,B,C}→LK2
LT(K)+H/2→T
LX(K)+H/2*LK2(1)→X
LY(K)+H/2*LK2(2)→Y
LZ(K)+H/2*LK2(3)→Z
prgmDGLSYS
{A,B,C}→LK3
LT(K)+H→T
LX(K)+H*LK3(1)→X
LY(K)+H*LK3(2)→Y
LZ(K)+H*LK3(3)→Z
prgmDGLSYS
{A,B,C}→LK4
LT(K)+H→LT(K+1)
LX(K)+H/6*(LK1(1)+2LK2(1)+2LK3(1)+LK4(1))→LX(K+1)
LY(K)+H/6*(LK1(2)+2LK2(2)+2LK3(2)+LK4(2))→LY(K+1)
LZ(K)+H/6*(LK1(3)+2LK2(3)+2LK3(3)+LK4(3))→LZ(K+1)
End
```

Die maximal drei DGL werden in der Datei DGLSYS erfasst und die entsprechenden Werte in den Listenplätzen **A**, **B** und **C** gespeichert.

8.3 Lösen einer Differenzialgleichung 3. Ordnung

Betrachte folgendes AWP:

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0 \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 2 \\ y''(0) &= 0 \end{aligned}$$

Wir prüfen, ob unser Programm die korrekte Lösung

$$y(t) = -2e^t + 5e^{2t} - 2e^{3t}$$

liefert.

eine DGL 3. Ordnung \Rightarrow drei DGL 1. Ordnung

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y''' = 6y'' - 11y' + 6y$$

$$\begin{aligned} y &= y_1 \\ y' &= y'_1 = y_2 \\ y'' &= y'_2 = y_3 \\ y''' &= y'_3 = 6y_3 - 11y_2 + 6y_1 \end{aligned}$$

Das DGL-System in das Unterprogramm DGLSYS eingeben und $n = 20$ Schritte mit der Schrittweite $h = 0.05$ rechnen.

```
PROGRAM:DGLSYS
:Y→A
:Z→B
:6Z-11Y+6X→C
```

```
prgmRK4SYS
T0=0
X0=1
Y0=2
Z0=0
H=0.05
N=20
```

punktweise graphische Darstellung und Fenstereinstellungen:

```
Plot1 Plot2 Plot3
On Off
Type: l..
Xlist: T
Ylist: X
Mark: +
```

```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=1
Xscl=0.2
Ymin=-10
Ymax=4
Yscl=2
Yres=1
```

8.4 Das Räuber-Beute-Modell von Volterra-Lotka

Lotka-Volterra-Gleichungen:

$$\dot{x} = \varepsilon_1 \cdot x - \gamma_1 \cdot x \cdot y$$

$$\dot{y} = -\varepsilon_2 \cdot y + \gamma_2 \cdot y \cdot x$$

$x(t)$ Anzahl der Beutetiere

$y(t)$ Anzahl der Räuber

$\varepsilon_1 > 0$ Reproduktionsrate der Beute (genügend Nahrung)

$\varepsilon_2 > 0$ Sterberate der Räuber (ohne Beute)

$\gamma_1 > 0$ Fressrate (Faktor pro Räuber)

$\gamma_2 > 0$ Reproduktionsrate der Räuber (Faktor pro Beutetier)

Dieses Modell wurde unabhängig von Vito Volterra und Alfred J. Lotka in den Jahren 1925 bzw. 1926 entwickelt.

Zahlenbeispiel



$x_0 = 100$ Zebras

$\varepsilon_1 = 0.08$

$\gamma_1 = 0.004$



$y_0 = 10$ Löwen

$\varepsilon_2 = 0.1$

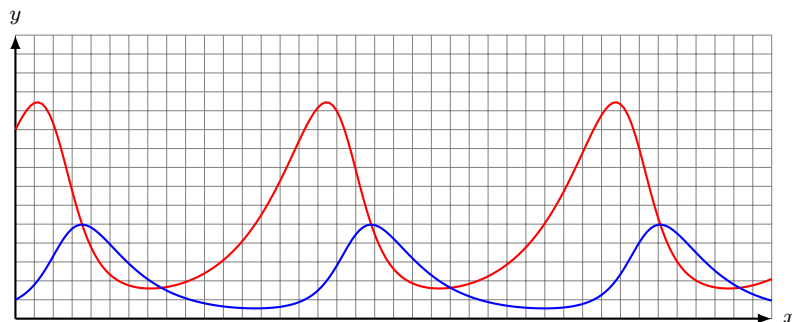
$\gamma_2 = 0.002$

Löse das DGL-System von Lotka-Volterra für $0 \leq t < 200$ mit $h = 1$ und stelle die beiden Populationsgrößen $x(t)$ und $y(t)$ in Abhängigkeit von t dar. Verwende dazu STAT PLOT 1 und STAT PLOT 2.

(Xmin=0, Xmax=200, Xscl=10, Ymin=0, Ymax=150, Yscl=50)

```
PROGRAM:DGLSYS
:0.08*X-0.004*X*Y→A
:-0.002*Y+0.1*Y*X→B
:0→C
```

Häufigkeitsdarstellung:



8.4.1 Graphische Darstellung in der Phasenebene

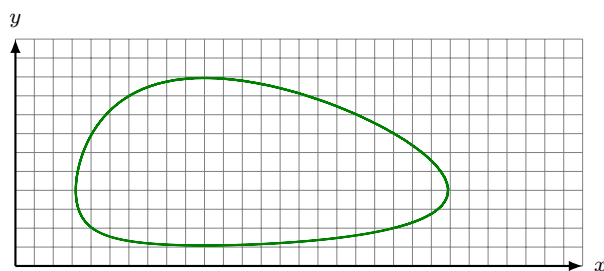
Phasenportrait

Für jedes t können $x(t)$ und $y(t)$ als Koordinaten eines Punktes gedeutet werden.

Die so gezeichnete Kurve heisst *Phasenkurve* oder *Trajektorie* in der Zustandsebene. Jeder Punkt auf der Phasenkurve stellt einen Zustand der Zebra-Löwen-Population dar.

Für die Darstellung der Phasenkurve verwenden wir STAT PLOT 3 (STAT PLOT 1 und STAT PLOT 2 deaktivieren). Wir wählen die Listen X und Y aus und aktivieren die Linendarstellung.

(Xmin=0, Xmax=120, Xscl=10, Ymin=0, Ymax=80, Yscl=10)



Frage 1

Nach wie vielen Wochen erreicht die Zebra population ihr erstes Minimum und wie gross ist es?

Nach etwa 35 Wochen (ca. 16 Zebras)

Frage 2

Nach wie vielen Wochen erreicht die Löwen population ihr erstes Maximum und wie gross ist es?

Nach etwa 18 Wochen (ca 50 Löwen)

Frage 3

Wie lange dauert ein Zyklus zwischen zwei Populationsmaxima?

Abstand zwischen zwei Maxima bei den Löwen: $94 - 18 = 76$ Wochen

Frage 4

Bei welchen Anfangspopulationen bleiben die Löwen- und Zebrabestände konstant?

konstant \Rightarrow keine Veränderung $\Rightarrow x'(t) = y'(t) = 0$:

$$0 = 0.08 \cdot x - 0.004 \cdot x \cdot y \quad || : x \neq 0$$

$$0 = -0.1 \cdot y + 0.002 \cdot x \cdot y \quad || : y \neq 0$$

$$0 = 0.08 - 0.004 \cdot y \quad \Rightarrow \quad y = 20 \text{ Löwen}$$

$$0 = -0.1 + 0.002 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = 50 \text{ Zebras}$$

8.5 Konkurrierende Spezies

Logistisches Wachstum

Wir betrachten das Modell einer Population, das bei einem starken Anstieg der Population eine einschränkende Bedingung enthält.

$$\dot{x} = x(\varepsilon - \sigma \cdot x) \quad (\text{Verhulst-Gleichung})$$

ε Wachstumsfaktor

σ hemmender Faktor

Dieses Modell wird *logistisches Wachstum* genannt und es stammt vom belgischen Mathematiker P.F. Verhulst (1804–1849). Er entwickelte es 1838 als Modell für das Bevölkerungswachstum.

R. Pearl fand zufriedenstellende experimentelle Übereinstimmung mit experimentellen Daten bei Fruchtfliegen (*Drosophila melanogaster*).

Beispiel 1 (M. S. Mohring)

$x(t)$ sei die Masse der Heilbuttpopulation zum Zeitpunkt t im Pazifischen Ozean.

Aufgrund von Schätzungen gilt:

$$\varepsilon = 0.71 \text{ Jahr}^{-1}$$

$$\sigma = 8.8 \cdot 10^{-9} \text{ Jahr}^{-1} \text{kg}^{-1}$$

$$x(0) = 20.1 \cdot 10^6 \text{ kg}$$

- (a) Bestimme die vorhandene Biomasse nach zwei Jahren.

$$x(2) = 46.7 \cdot 10^6 \text{ kg}$$

- (b) Gegen welchen Grenzwert strebt die Populationsgrösse nach langer Zeit?

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \approx 80.5 \cdot 10^6 \text{ kg}$$

Modell ohne Konkurrenz

Seien $x(t)$ und $y(t)$ die Populationen der beiden Spezies zur Zeit t .

Falls die beiden Arten in getrennten Territorien leben, gilt:

$$\dot{x} = x(\varepsilon_1 - \sigma_1 \cdot x) = \varepsilon_1 \cdot x \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1/\sigma_1} \cdot x \right)$$

$$\dot{y} = y(\varepsilon_2 - \sigma_2 \cdot y) = \varepsilon_2 \cdot y \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2/\sigma_2} \cdot y \right)$$

ε_1 Wachstumsrate von Spezies 1

ε_2 Wachstumsrate von Spezies 2

ε_1/σ_1 Sättigungsniveau von Spezies 1

ε_2/σ_2 Sättigungsniveau von Spezies 2

Modell mit Konkurrenz

Nun konkurrieren die beiden Spezies um einen begrenzten Futtermvorrat. Wie lässt sich dies modellieren?

$$\dot{x} = x(\varepsilon_1 - \sigma_1 \cdot x - \alpha_1 \cdot y)$$

$$\dot{y} = y(\varepsilon_2 - \sigma_2 \cdot y - \alpha_2 \cdot x)$$

Das Wachstum einer Spezies wird durch einen zur Populationsgrösse der jeweils anderen Spezies proportionalen Term gehemmt.

Beispiel 2

$$\dot{x} = x(1 - x - y)$$

$$\dot{y} = y(0.75 - y - 0.5x)$$

$$x(0) = 0.4, y(0) = 1.3, n = 40, h = 0.5, [t] = \text{Jahre}$$

Stelle die Populationsgrössen $x(t)$ und $y(t)$ in Abhängigkeit der Zeit t dar.

Beispiel 3

Wachstum der 2. Spezies verkleinern:

$$\dot{x} = x(1 - x - y)$$

$$\dot{y} = y(0.5 - y - 0.5x)$$

$$x(0) = 0.2, y(0) = 0.8, n = 40, h = 0.5, [t] = \text{Jahre}$$