### Aufgabe 7.1

$y' - y = 2x\mathrm{e}^{2x}$

$u(x) = -1$ und $v(x) = 2x\mathrm{e}^{2x}$

$$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int (-1)\,\mathrm{d}x = -x$$

$$G(x) = \int v(x) \cdot \mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int 2x\,\mathrm{e}^{2x} \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\int x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x \overset{\text{FTB S.73}}{=} 2(x-1)\mathrm{e}^{x}$$

$$y(x) = \big(G(x) + C\big)\mathrm{e}^{-U(x)} = \big(2(x-1)\mathrm{e}^{x} + C\big)\mathrm{e}^{x} = 2(x-1)\mathrm{e}^{2x} + C\mathrm{e}^{x}$$

*Lösung des AWPs:* $y(0) = 1$

$1 = -2 + C$
$C = 3$

$$\boxed{y(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{x}}$$

### Aufgabe 7.2

$y' + 2y = x\mathrm{e}^{-2x}$

$u(x) = 2$ und $v(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$

$$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int 2\,\mathrm{d}x = 2x$$

$$G(x) = \int v(x) \cdot \mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{e}^{-2x} \cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x^2$$

$$y(x) = \big(G(x) + C\big)\mathrm{e}^{-U(x)} = \left(\tfrac{1}{2}x^2 + C\right)\mathrm{e}^{-2x}$$

*Lösung des AWP:* $(y(1) = 0)$

$0 = \left(\tfrac{1}{2} + C\right)\mathrm{e}^{-2}$
$C = -\tfrac{1}{2}$

$$\boxed{y(x) = \left(\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x} = \tfrac{1}{2}\left(x^2 + 1\right)\mathrm{e}^{-2x}}$$

### Aufgabe 7.3

$xy' + 2y = x^2 - x + 1 \quad (x > 0)$

normalisieren: $y' + \frac{2}{x}\,y = \frac{x^2 - x + 1}{x} = x - 1 + \frac{1}{x}$

$u(x) = \frac{2}{x}$ und $v(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$

$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln x = \ln(x^2)$

$$
\begin{aligned}
G(x) &= \int v(x) \cdot \mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2 - x + 1}{x} \cdot \mathrm{e}^{\ln x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{x^2 - x + 1}{x} \cdot x^2\,\mathrm{d}x = \int \big(x^3 - x^2 + x\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(x) &= (G(x) + C) \cdot \mathrm{e}^{-U(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C\right)\mathrm{e}^{-\ln(x^2)} \\
&= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C\right)x^{-2} \\
&= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} + \frac{C}{x^2}
\end{aligned}
$$

*Lösung des AWP*: $y(1) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{12}$

$\boxed{y(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}x^{-2}}$

**Aufgabe 7.4**

$y' + \frac{2}{x}\,y = \frac{\cos x}{x^2}$

$u(x) = \frac{2}{x}$ und $v(x) = \frac{\cos x}{x^2}$

$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x| = \ln x^2$

$$
\begin{aligned}
G(x) &= \int v(x) \cdot \mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{x^2} \cdot \mathrm{e}^{\ln x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{x^2} \cdot x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \big(G(x) + C\big)\mathrm{e}^{-U(x)}\,\mathrm{d}x = (\sin x + C)\,\mathrm{e}^{-\ln(x^2)} \\
&= (\sin x + C)\,x^{-2}
\end{aligned}
$$

*Lösung des AWP*: $y(\pi) = 0$

$$
\begin{aligned}
0 &= (\sin \pi + C)\, \pi^{-2} \\
0 &= (0 + C)\pi^{-2} \\
C &= 0
\end{aligned}
$$

$$\boxed{y(x) = x^{-2}\, \sin x}$$

**Aufgabe 7.5**

$x^3 y' + 4x^2 y = \mathrm{e}^{-x}$

normalisieren: $y' + \dfrac{4}{x} y = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^3}$

$u(x) = \dfrac{4}{x}$ und $v(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^3}$.

$U(x) = \displaystyle\int u(x)\, \mathrm{d}x = \int \frac{4}{x}\, \mathrm{d}x = 4 \ln x = \ln x^4$

$$
\begin{aligned}
G(x) &= \int v(x) \mathrm{e}^{U(x)}\, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^3} \mathrm{e}^{\ln(x^4)}\, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^3} x^4\, \mathrm{d}x \\
&= \int x\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x = (-x - 1)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{(FTB S. 73)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \big(G(x) + C\big)\mathrm{e}^{-U(x)} = \big((-x - 1)\mathrm{e}^{-x} + C\big)\mathrm{e}^{-\ln(x^4)} \\
&= \big(-(x + 1)\mathrm{e}^{-x} + C\big) x^{-4}
\end{aligned}
$$

*Lösung des AWP:* $y(-1) = 0$:

$$0 = \big(C + \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^1\big)(-1)^{-4}$$

$C = 0$

$$\boxed{y(x) = -x\, \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} = -(x + 1)\mathrm{e}^{-x}}$$

**Aufgabe 7.6**

$xy' + (x + 1)y = x$

normalisieren: $y' + \dfrac{x + 1}{x} y = 1$

$u(x) = \dfrac{x + 1}{x} = 1 + \dfrac{1}{x}$ und $v(x) = 1$

$U(x) = \displaystyle\int u(x)\, \mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)\, \mathrm{d}x = x + \ln x$

$$G(x) = \int v(x)\mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot \mathrm{e}^{x+\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\ln x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \mathrm{e}^x x\,\mathrm{d}x = (x-1)\mathrm{e}^x$$

$$y(x) = \big[G(x)+C\big]\mathrm{e}^{-U(x)}\,\mathrm{d}x = \big(x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C\big)\mathrm{e}^{-(x+\ln x)}$$
$$= \big(x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C\big)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\ln x} = \big(x - 1 + C\mathrm{e}^{-x}\big)x^{-1}$$

*Lösung des AWPs:* $y(\ln 2) = 1$

$$1 = \big(\ln 2 - 1 + C\mathrm{e}^{-\ln 2}\big)\frac{1}{\ln 2}$$

$$\ln 2 = \ln 2 - 1 + C/2$$

$$C = 2$$

$$\boxed{y(x) = \big(x - 1 + 2\mathrm{e}^{-x}\big)x^{-1}}$$

**Aufgabe 7.7**

$\dot{s}(t) = -\alpha(s(t) - b) = -\alpha s(t) + \alpha b$ mit $\alpha > 0$

Die Änderungsrate des Stoffes ist proportional zum Stoff, der vergessen werden kann. Weil Vergessen eine Verkleinerung des Wissensstoffs darstellt, ist das Vorzeichen negativ.

Normalform: $\dot{s}(t) + \alpha s(t) = \alpha b$

$$u(t) = \alpha \quad \Rightarrow \quad U(t) = \int \alpha\,\mathrm{d}t = \alpha t$$

$$v(t) = b \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int \alpha b\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t = b\mathrm{e}^{\alpha t}$$

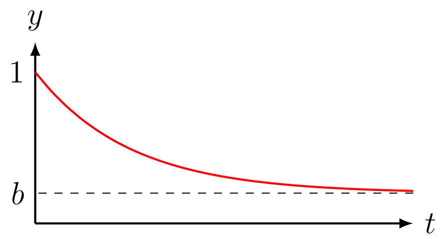
$$s(t) = \big(G(t) + C\big)\mathrm{e}^{-U(t)} = \big(b\mathrm{e}^{\alpha t} + C\big)\mathrm{e}^{-\alpha t} = b + C\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

AWP: $s(0) = 1$

$b + C = 1$

$C = 1 - b$

$$s(t) = b + (1-b)\mathrm{e}^{-\alpha t}$$




**Aufgabe 7.8**

$\dot{b}(t) = \alpha\big(1 - b(t)\big) = \alpha - \alpha b(t)$ mit $\alpha > 0$

Die Änderungsrate des Gurtbenutzer ist proportional zur Anzahl derer, die das Gurttragen (noch) ablehnen. Weil die Zahl der Gurtträger wächst, ist das Vorzeichen positiv.

Normalform: $\dot{b}(t) + \alpha b(t) = \alpha$

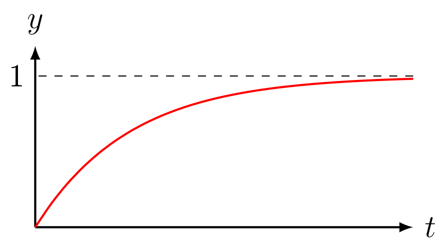
$$u(t) = \alpha \quad \Rightarrow \quad U(t) = \int \alpha \, \mathrm{d}t = \alpha t$$

$$v(t) = \alpha \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int \alpha \mathrm{e}^{\alpha t} \, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\alpha t}$$

$$b(t) = \big(G(t) + C\big)\mathrm{e}^{-U(t)} = \big(\mathrm{e}^{\alpha t} + C\big)\mathrm{e}^{-\alpha t} = 1 + C\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

AWP: $b(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -1$

$$\boxed{b(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}}$$




**Aufgabe 7.9**

$$\begin{aligned}
\vartheta\left(t + \frac{\ln 2}{k}\right) &= \vartheta_U + \big(\vartheta_0 - \vartheta_U\big)\mathrm{e}^{-k\left(t + \frac{\ln 2}{k}\right)} \\
&= \vartheta_U + \big(\vartheta_0 - \vartheta_U\big)\mathrm{e}^{-kt - \ln 2} \\
&= \vartheta_U + \big(\vartheta_0 - \vartheta_U\big)\mathrm{e}^{-kt} \cdot \mathrm{e}^{-\ln 2} \\
&= \vartheta_U + \tfrac{1}{2}\big(\vartheta_0 - \vartheta_U\big)\mathrm{e}^{-kt} \\
&= \tfrac{1}{2}\vartheta_U + \tfrac{1}{2}\vartheta_U + \tfrac{1}{2}\big(\vartheta_0 - \vartheta_U\big)\mathrm{e}^{-kt} \\
&= \tfrac{1}{2}\vartheta_U + \tfrac{1}{2}\Big[\vartheta_U + \big(\vartheta_0 - \vartheta_U\big)\mathrm{e}^{-kt}\Big] \\
&= \tfrac{1}{2}\vartheta_U + \tfrac{1}{2}\vartheta(t) = \tfrac{1}{2}\big(\vartheta_U + \vartheta(t)\big)
\end{aligned}$$

**Aufgabe 7.10**

Zuerst findet bei einer Umgebungstemperatur von 19°C während 90 Minuten eine Erwärmung von 7°C auf 15°C statt:

$$\vartheta(t) = \vartheta_U - (\vartheta_U - \vartheta_0)\mathrm{e}^{-kt}$$

$$19°\mathrm{C} - (19°\mathrm{C} - 7°\mathrm{C})\mathrm{e}^{-90\,\mathrm{min}\cdot k} = 15°\mathrm{C}$$

$$-\mathrm{e}^{-90\,\mathrm{min}\cdot k} = \frac{15°\mathrm{C} - 19°\mathrm{C}}{19°\mathrm{C} - 7°\mathrm{C}} = \frac{-4°\mathrm{C}}{12°\mathrm{C}} = -\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{e}^{-90\,\mathrm{min}\cdot k} = \frac{1}{3} \quad || \ln$$

$$-90\,\mathrm{min}\cdot k = \ln\frac{1}{3}$$

$$k = \frac{\ln 3}{90\,\mathrm{min}}$$

Danach wird das 15°C warme Bier im 7°C kalten Kühlschrank während 180 Minuten gekühlt:

$$\vartheta(t) = \vartheta_U + (\vartheta_0 - \vartheta_U)\mathrm{e}^{-kt}$$

$$\vartheta(180\,\mathrm{min}) = 7°\mathrm{C} + (15°\mathrm{C} - 7°\mathrm{C})\mathrm{e}^{-\frac{\ln 3}{90\,\mathrm{min}}\cdot 180\,\mathrm{min}}$$

$$= 7°\mathrm{C} + 8°\mathrm{C}\mathrm{e}^{-2\ln 3} = 7°\mathrm{C} + 8°\mathrm{C}\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{9}}$$

$$= 7°\mathrm{C} + \frac{1}{9}\cdot 8°\mathrm{C} \approx 7.89°\mathrm{C}$$

Das Bier hat nach 3 Stunden eine Temperatur von etwa 8°C.

**Aufgabe 7.11**

$K(t)$: Kohlen(stoff)dioxidgehalt zur Zeit $t$

$K(0) = 150\,\mathrm{m}^3 \cdot 0.3\% = 0.45\,\mathrm{m}^3$

$CO_2$-Menge via Frischluft: $30\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}} \cdot 0.03\% = 0.009\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}$

$CO_2$-Menge durch Atmung: $20 \cdot \frac{1}{4}\,\frac{\mathrm{dm}^3}{\mathrm{min}} = 0.005\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}$

$$\mathrm{d}K(t) = -\frac{K(t)}{150\,\mathrm{m}^3}\cdot\frac{30\,\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}\,\mathrm{d}t + \frac{0.009\,\mathrm{m}^3}{30\,\mathrm{m}^3}\cdot\frac{30\,\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}\,\mathrm{d}t + \frac{0.005\,\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}\,\mathrm{d}t$$

$$CO_2\text{-Volumen} = \underbrace{\text{Volumenkonzentration}\cdot\text{Volumenstrom}}_{\text{Änderungsrate}}\cdot\text{Dauer}$$

$$\dot{K}(t) = -\frac{1}{5}K(t)\,\frac{1}{\mathrm{min}} + 0.009\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}} + 0.005\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}$$

Normalform: $\dot{K}(t) + 0.2K(t) + 0.014$

$$u(t) = 0.2 \quad\Rightarrow\quad U(t) = 0.2t$$

$$v(t) = 0.014 \quad\Rightarrow\quad G(t) = \int 0.014\mathrm{e}^{0.2t}\,\mathrm{d}t = 0.07\mathrm{e}^{0.2t}$$

$K(t) = \big(0.07\mathrm{e}^{0.2t} + C\big)\mathrm{e}^{-0.2t} = 0.07 + C\mathrm{e}^{-0.2t}$

$$\begin{aligned} \text{AWP:} \qquad K(0) &= 0.45 \\ 0.07 + C &= 0.45 \\ C &= 0.38 \end{aligned}$$

(a) $K(t) = 0.07 + 0.38\mathrm{e}^{-0.2t} \quad \text{mit } [K(t)] = \mathrm{m}^3$

(b) $\dfrac{\lim_{t\to\infty} K(t)}{K(0)} = \dfrac{0.07\,\mathrm{m}^3}{0.45\,\mathrm{m}^3} = 0.16$

**Aufgabe 7.12**

$K(t)$: Kohlen(stoff)dioxidgehalt zur Zeit $t$

$K(0) = 17\,600\,\mathrm{m}^3 \cdot 0.15\% = 26.4\,\mathrm{m}^3$

Lüftungsleistung: $f$ in $\dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}$

$CO_2$-Abfuhr durch Abluft: $-\dfrac{K(t)}{17\,600\,\mathrm{m}^3} \cdot f$

$CO_2$-Zufuhr durch Zuluft: $f \cdot 0.03\% = 0.0003 \cdot f$

$\dot{K}(t) = -\dfrac{K(t)}{17\,600\,\mathrm{m}^3} \cdot f + 0.0003 \cdot f$

Normalform: $\dot{K}(t) + \dfrac{f}{17\,600\,\mathrm{m}^3} \cdot K(t) = 0.0003f$

$u(t) = \dfrac{f}{17\,600} \quad \Rightarrow \quad U(t) = \dfrac{f}{17\,600} \cdot t$

$v(t) = 0.0003f \quad \Rightarrow \quad G(t) = \displaystyle\int 0.0003f\mathrm{e}^{f/17\,600\cdot t}\,\mathrm{d}t = 5.28\mathrm{e}^{f/17\,600\cdot t}$

$K(t) = \big(5.28\mathrm{e}^{f/17\,600\cdot t} + C\big)\mathrm{e}^{-f/17\,600\cdot t} = 5.28 + C\mathrm{e}^{-f/17\,600\cdot t}$

AWP: $K(0) = 26.4 \quad \Rightarrow \quad 5.28 + C = 26.4 \quad \Rightarrow \quad C = 21.12$

$K(t) = 5.28 + 21.12\mathrm{e}^{-f/17\,600\cdot t} \quad \text{mit } [K(t)] = \mathrm{m}^3$

$$\begin{aligned} K(10) &= 8.8 \\ 5.28 + 21.12\mathrm{e}^{-f/1760} &= 8.8 \\ \mathrm{e}^{-f/1760} &= 1/6 \\ -f/1760 &= \ln(1/6) \\ f &= 1760 \cdot \ln 6 = 3153.5\,\mathrm{m}^3 \end{aligned}$$