Aufgabe 6.1

$$
\begin{aligned}
y' &= \sin 2x \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \sin 2x \\
\mathrm{d}y &= \sin 2x \,\mathrm{d}x \\
\int 1 \,\mathrm{d}y &= \int \sin 2x \,\mathrm{d}x \\
y &= -\frac{1}{2}\cos 2x + C
\end{aligned}
$$

AWP: $P_0\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$: $0 = -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2} + C = 0 + C \Rightarrow C = 0$

$y(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$

Aufgabe 6.2

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \sin x \\
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \sin x \\
\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x &= 1 \,\mathrm{d}t \\
\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x &= \int 1 \,\mathrm{d}t \\
\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| &= t + C_1 \quad \text{(FBT S. 74)} \\
\left|\tan\frac{x}{2}\right| &= \mathrm{e}^{t+C_1} = \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{C_1} \\
\tan\frac{x}{2} &= C\mathrm{e}^t \\
\frac{x}{2} &= \arctan\left(C\mathrm{e}^t\right) \\
x(t) &= 2\arctan\left(C\mathrm{e}^t\right)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6.3

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{x}{y+1} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{x}{y+1} \\
(y+1)\mathrm{d}y &= x\,\mathrm{d}x \\
\int (y+1)\,\mathrm{d}y &= \int x\,\mathrm{d}x \\
\frac{1}{2}(y+1)^2 &= \frac{1}{2}x^2 + C_1 \\
(y+1)^2 &= x^2 + 2C_1 \\
y+1 &= \pm\sqrt{x^2+C} \\
y &= \pm\sqrt{x^2+C} - 1
\end{aligned}$$

AWP:

$$P_0(2,2) \in G_y \quad \Leftrightarrow \quad 2 = y(2) \quad \Leftrightarrow \quad 2 = \sqrt{4+C} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = 5$$

$$y(x) = \sqrt{x^2+5} - 1$$

Aufgabe 6.4

$x^2\,y' + y = 0$

$$\begin{aligned}
x^2\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -y \\
x^2\,\mathrm{d}y &= -y\,\mathrm{d}x \\
\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\
\ln|y| &= \frac{1}{x} + C_1 \\
|y| &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}+C_1} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \cdot \mathrm{e}^{C_1} \\
y &= C\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

AWP: $x_0 = 1$, $y_0 = 2$:

$$2 = C \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{1}} = C \cdot \mathrm{e} \quad \Rightarrow \quad C = 2\mathrm{e}^{-1}$$

$y(x) = 2\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}-1}$ (beide Lösungen sind ok)

Aufgabe 6.5

$$y' = y^2 - 4x + 3$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 - 4y + 3$$

$$\frac{1}{(y-1)(y-3)}\,\mathrm{d}y = 1\,\mathrm{d}x$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{(y-1)(y-3)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y-3}$$

$$1 = A(y-3) + B(y-1)$$

$$1 = (A+B)y + (-3A - B)$$

$$\begin{matrix} A + B = 0 \\ -3A - B = 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} A = -1/2 \\ B = 1/2 \end{matrix}$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{y-1}\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int \frac{1}{y-3}\,\mathrm{d}y = \int 1\,\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{2}\ln|y-1| + \frac{1}{2}\ln|y-3| = x + C_1$$

$$-\frac{1}{2}\ln|y-1| + \frac{1}{2}\ln|y-3| = x + C_1 \quad || \cdot 2$$

$$-\ln|y-1| + \ln|y-3| = 2x + 2C_1$$

$$\ln|y-3| - \ln|y-1| = 2x + C_2 \quad \text{Logarithmengesetze}$$

$$\ln\left|\frac{y-3}{y-1}\right| = 2x + C_2 \quad || \exp(\dots)$$

$$\left|\frac{y-3}{y-1}\right| = \mathrm{e}^{2x+C_2} = \mathrm{e}^{2x} \cdot \mathrm{e}^{C_2}$$

$$\frac{y-3}{y-1} = \pm\mathrm{e}^{C_2}\mathrm{e}^{2x}$$

$$y - 3 = C_3(y-1)\mathrm{e}^{2x}$$

$$y - C_3 y\mathrm{e}^{2x} = 3 - C_3\mathrm{e}^{2x}$$

$$y\big(1 - C_3\mathrm{e}^{2x}\big) = 3 - C_3\mathrm{e}^{2x}$$

$$y = \frac{3 - C_3\mathrm{e}^{2x}}{1 - C_3\mathrm{e}^{2x}}$$

AWP:

$$2 = \frac{3-C}{1-C} \quad \Rightarrow \quad 2(1-C) = 3 - C \quad \Rightarrow \quad C = -1$$

$$y(x) = \frac{3 + \mathrm{e}^{2x}}{1 + \mathrm{e}^{2x}}$$

Aufgabe 6.6

$y' = y + 2x \neq f(x)g(y) \quad$ nicht separierbar

Substitution:

$u = y + 2x \quad$ [genauer: $u(x) = y(x) + 2x$]

Damit haben wir x auf der linken Seite vorläufig aus der Gleichung genommen und u ins Spiel gebracht. Nun müssen wir noch y' auf der rechten Seite durch u' ersetzen:

$u' = y' + 2 \quad \Rightarrow \quad y' = u' - 2$

Insgesamt:

$$
\begin{aligned}
u' - 2 &= u \\
u' &= u + 2 \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= u + 2 \\
\int \frac{1}{u+2}\,\mathrm{d}u &= \int 1\,\mathrm{d}x \\
\ln|u+2| &= x + C_1 \\
|u+2| &= \mathrm{e}^{x+C_1} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{C_1} \\
u &= \pm\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^x - 2 \\
u &= C\mathrm{e}^x - 2
\end{aligned}
$$

Substitution ($u = y + 2x$) rückgängig machen:

$u = y + 2x \quad \Rightarrow \quad y(x) = u - 2x = C\mathrm{e}^x - 2x - 2$

Aufgabe 6.7

$$y' = y - \frac{y}{x} \quad \text{(Separierung durch Faktorisieren)}$$

$$y' = y\left(1 - \frac{1}{x}\right) = f(y)g(x)$$

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = x - \ln|x| + C_1 = x - \ln(x) + C_1 \quad (x > 0)$$

$$|y| = \mathrm{e}^{x-\ln(x)+C_1} = \mathrm{e}^x \cdot x^{-1} \cdot \mathrm{e}^{C_1}$$

$$y = Cx^{-1}\mathrm{e}^x \quad (C = \pm\mathrm{e}^{C_1})$$

AWP: $y(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = C \cdot 1 \cdot \mathrm{e} \quad \Rightarrow \quad C = \mathrm{e}^{-1}$

$$y(x) = \frac{1}{\mathrm{e}x}\,\mathrm{e}^x$$

Aufgabe 6.8

(a)
$$y' = y^2$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int 1\,\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{y} = x + C$$

$$-y = \frac{1}{x + C}$$

$$y(x) = \frac{1}{C - x} \quad (C = -C_1)$$

Probe:

$$y' = \left[\frac{1}{C - x}\right]' = \left[(C - x)^{-1}\right]$$

$$= (-1)(C - x)^{-2} \cdot (-1) \quad \text{(innere Ableitung!)}$$

$$= \frac{1}{(C - x)^2} = y^2 \quad \text{(korrekt)}$$

(b) $D = \mathbb{R} \setminus \{C\}$