

**Aufgabe 5.1**

DGL:  $y'' - 6y' + 9y = 0$

charakteristische Gleichung:  $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$(\lambda - 3)^2 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$

$y(x) = (C_1 + C_2x)e^{3x}$

$y'(x) = C_2e^{3x} + 3(C_1 + C_2x)e^{3x}$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_1 = 2 \\ y'(0) = C_2 + 3C_1 = -1 \end{array} \right\} C_1 = 2, C_2 = -7$$

$y(x) = (2 - 7x)e^{3x}$

**Aufgabe 5.2**

DGL:  $y'' - \frac{1}{6}y' - \frac{1}{6}y = 0$

charakteristische Gleichung:  $\lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda - \frac{1}{6} = 0$

$6\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

$(2\lambda - 1)(3\lambda + 1) = 0$

$\lambda_1 = \frac{1}{2}$

$\lambda_2 = -\frac{1}{3}$

$y(x) = C_1e^{\frac{1}{2}x} + C_2e^{-\frac{1}{3}x}$

$y'(x) = \frac{1}{2}C_1e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{3}C_2e^{-\frac{1}{3}x}$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{2}C_1 - \frac{1}{3}C_2 = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = 6, C_2 = -6$$

$y(x) = 6e^{\frac{1}{2}x} - 6e^{-\frac{1}{3}x}$

### Aufgabe 5.3

$$\text{DGL: } y'' + 2y' + 10y = 0$$

$$\text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -36 = (6i)^2$$

$$\lambda_1 = \frac{-2 + 6i}{2} = -1 + 3i$$

$$\lambda_2 = \dots = -1 - 3i$$

$$y(x) = e^{-x}(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$$

$$y'(x) = -e^{-x}(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x) + e^{-x}(3C_1 \cos 3x - 3C_2 \sin 3x)$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_2 = 6 \\ y'(0) = -C_2 + 3C_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = 2, C_2 = 6$$

$$y(x) = e^{-x}(2 \sin 3x + 6 \cos 3x)$$

### Aufgabe 5.4

$$\text{DGL: } y'' + 2y' = 0$$

$$\text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$y(x) = C_1 e^0 + C_2 e^{-2x} = C_1 + C_2 e^{-2x}$$

$$y'(x) = -2C_2 e^{-2x}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_1 + C_2 = 3 \\ y'(0) = -2C_2 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = 4, C_2 = -1$$

$$y(x) = 4 - e^{-2x}$$

### Aufgabe 5.5

$$\text{DGL: } y'' + 16y = 0$$

$$\text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 + 16 = 0$$

$$\lambda^2 = -16 = (4i)^2$$

$$\lambda_1 = 0 + 4i$$

$$\lambda_2 = 0 - 4i$$

$$y(x) = e^0(C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x) = C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x$$

$$y'(x) = 4C_1 \cos 4x - 4C_2 \sin 4x$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_2 = 2 \\ y'(0) = 4C_1 = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 2$$

$$y(x) = 2 \cos 4x - \sin 4x$$

### Aufgabe 5.6

$$C_1 = 3, C_2 = 2$$

$$C = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad C \sin(\omega t + \gamma) &= C \sin(\omega t) \cos \gamma + C \cos(\omega t) \sin \gamma \\ &= 2 \sin(\omega t) + 3 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$\text{Koeffizientenvergleich: } 2 = C \cos \gamma$$

$$3 = C \sin \gamma$$

$$(x, y) = (2, 3) \text{ im 1. Quadranten (ok)}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{C \sin \gamma}{C \cos \gamma} = \tan \gamma \Rightarrow \gamma = \arctan \frac{3}{2} = 0.983$$

$$y(t) = \sqrt{13} \sin(\omega t + 0.983)$$

$$\text{(b)} \quad (C_1, -C_2) = (3, -2) \text{ im 4. Quadranten}$$

$$\delta = \arctan \frac{-C_2}{C_1} = \arctan \frac{-2}{3} = -0.588$$

$$y(t) = \sqrt{13} \cos(\omega t - 0.588)$$

### Aufgabe 5.7

$$y_1 = C_1 e^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$y_1' = -\frac{b}{2a} C_1 e^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$y_1'' = \frac{b^2}{4a^2} C_1 e^{-\frac{b}{2a}x}$$

einsetzen:

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= \left( a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - b \cdot \frac{b}{2a} + c \right) C_1 e^{-\frac{b}{2a}x} \\ &= \left( \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \right) C_1 e^{-\frac{b}{2a}x} \\ &= \left( \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \right) C_1 e^{-\frac{b}{2a}x} \\ &= - \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a} \right) C_1 e^{-\frac{b}{2a}x} = 0 \end{aligned}$$

### Aufgabe 5.7

$$y_2 = C_2 x e^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$y_2' = C_2 e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a} x C_2 e^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$y_2'' = \dots = -\frac{b}{a} C_2 e^{-\frac{b}{2a}x} + \frac{b^2}{4a^2} x C_2 e^{-\frac{b}{2a}x}$$

einsetzen:

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= \left( -b + \frac{b^2}{4a}x + b - \frac{b^2}{2a}x + cx \right) C_2 e^{-\frac{b}{2a}x} \\ &= \frac{b^2x - 2b^2x + 4acx}{4a} C_2 e^{-\frac{b}{2a}x} \\ &= \frac{-(b^2 - 4ac)x}{4a} C_2 e^{-\frac{b}{2a}x} = 0 \end{aligned}$$

### Aufgabe 5.8

Setze in der Lösungsfunktion der erzwungenen gedämpften Schwingung (Formelsammlung S. 82)  $\delta = 0$  ein:

$$y(t) = y_h(t) + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cos(\omega_1 t)$$

$y_h(t)$  ist eine allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL.

Mit  $\delta = 0$  folgt aus  $\tan \gamma = \frac{2\delta\omega_1}{\omega_1^2 - \omega_0^2} = 0$  auch  $\gamma = 0$

### Aufgabe 5.9

$$y(t) = \frac{A}{2\omega_0} t \cdot \sin \omega_0 t$$

$$\dot{y}(t) = \frac{A}{2\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t + \frac{A}{2} t \cdot \cos \omega_0 t$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{A}{2} \cdot \cos \omega_0 t + \frac{A}{2} \cdot \cos \omega_0 t - \frac{A\omega_0}{2} t \cdot \sin \omega_0 t$$

$\ddot{y}(t)$  und  $y(t)$  in die DGL  $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$  einsetzen:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \omega_0^2 y &= A \cos \omega_0 t - \frac{A\omega_0}{2} t \cdot \sin \omega_0 t + \omega_0^2 \cdot \frac{A}{2\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t \\ &= A \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

### Aufgabe 5.10

- Lösung der homogenen DGL  $y'' - 4y' + 3y = 0$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$$

- partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

$$\text{Ansatz: } y_i(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_i'(x) = 2Ax + B$$

$$y_i''(x) = 2A$$

einsetzen:

$$2A - 4(2Ax + B) + 3(Ax^2 + Bx + C) = 6x^2 + 5x + 3$$

$$3Ax^2 + (-8A + 3B)x + (2A - 4B + 3C) = 6x^2 + 5x + 3$$

Koeffizientenvergleich:

$$3A = 6 \quad A = 2$$

$$-8A + 3B = 5 \quad \Rightarrow \quad B = 7$$

$$2A - 4B + 3C = 3 \quad C = 9$$

$$y_i(x) = 2x^2 + 7x + 9$$

- allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_h(x) + y_i(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + 2x^2 + 7x + 9$$

### Aufgabe 5.11

- (a)  $\ddot{y} + 4y = 0$ : freie ungedämpfte Schwingung
- (b)  $\ddot{y} + 7\dot{y} + 12y = 0$ : freie gedämpfte Schwingung
- (c)  $\ddot{y} + 4\dot{y} + 13y = 5 \cos(5t)$ : erzwungene gedämpfte Schwingung

### Aufgabe 5.12

$$\Delta F = 0.5 \text{ N}$$

$$\Delta y = 0.1 \text{ m}$$

$$m = 0.25 \text{ kg}$$

$$y(0) = 0.05 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = 0 \text{ m s}^{-1}$$

(a)  $\Delta F = D \cdot \Delta y$

$$D = \frac{\Delta F}{\Delta y} = \frac{0.5 \text{ N}}{0.1 \text{ m}} = 5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

(b) DGL:  $m\ddot{y} + Dy = 0$

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0 \quad (\text{freie ungedämpfte Schwingung})$$

$$\text{Kreisfrequenz: } \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{5 \text{ Nm}^{-1}}{0.25 \text{ kg}}} \approx 4.472 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\text{Frequenz: } \nu = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 0.712 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{Schwingungsdauer: } T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \nu^{-1} \approx 1.405 \text{ s}$$

(c) Anfangswertproblem:  $y(0) = 0.05 \text{ m}$ ,  $\dot{y}(0) = 0$

$$y(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$$

$$\dot{y}(t) = -C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t$$

$$y(0) = C_1 = 0.05 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = C_2 = 0 \text{ m}$$

$$y(t) = 0.05 \cos(4.472t) \text{ m}$$

### Aufgabe 5.13

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{D}{m} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$D = \frac{4\pi^2 \cdot m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 2}{9} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2} = 8.773 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

### Aufgabe 5.14

(a) Amplitude:  $A = 0.04 \text{ m}$

$$\text{Federkonstante: } D = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{6 \cdot 10^{-4} \text{ N}}{0.03 \text{ m}} = 0.02 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{0.02}{0.002}} \text{ s}^{-1} = \sqrt{10} \text{ s}^{-1} \approx 3.162 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{Frequenz: } \nu = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 0.5033 \text{ s}^{-1}$$

(b)  $y(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$

$$\dot{y}(t) = -C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t$$

$$y(t) = -0.04 \cos \omega_0 t$$

$$\begin{aligned} \text{für Teil (c): } \dot{y}(t) &= 0.04\sqrt{10} \cos(\sqrt{10}t) \text{ m s}^{-1} \\ &= \sqrt{2} \cos(\sqrt{10}t) \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

(c)  $-0.02 = -0.04 \cos(\sqrt{10}t)$

$$\cos(\sqrt{10}t) = 0.5$$

1. Lösung:

$$\sqrt{10}t = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi = \frac{\pi + k \cdot 6\pi}{3}$$

$$t_{1,k} = \frac{\pi + k \cdot 6\pi}{3\sqrt{10}} \text{ s}$$

2. Lösung:

$$\sqrt{10}t = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi = \frac{5\pi + k \cdot 6\pi}{3}$$

$$t_{2,k} = \frac{5\pi + k \cdot 6\pi}{3\sqrt{10}} \text{ s}$$

### Aufgabe 5.15

$m\ddot{y} + Dy = 0$  freie ungedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \Rightarrow D = \frac{0.1 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.05 \text{ m}} = 19.62 \text{ Nm}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{19.62 \text{ N m}^{-1}}{0.1 \text{ kg}}} = 14 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\text{AWP: } y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{y}(t) = -\omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t)$$

$$y(0) = C_1 = 0 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = \omega_0 C_2 = 0.1 \text{ ms}^{-1} \Rightarrow C_2 = \frac{0.1 \text{ m s}^{-1}}{14 \text{ rad s}^{-1}} = 0.00714 \text{ m}$$

$$(a) \ y(t) = 0.00714 \text{ m} \cdot \sin(14 \text{ rad s}^{-1} \cdot t)$$

$$(b) \ \hat{y} \sin(\omega_0 t) = 0$$

$$\sin(\omega_0 t) = 0$$

$$\omega_0 t = \pi$$

$$t = \frac{\pi}{\omega_0}$$

$$t = \frac{\pi \text{ rad}}{14 \text{ rad s}^{-1}} = 0.224 \text{ s}$$

### Aufgabe 5.16

$m\ddot{y} + Dy = 0$  freie ungedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \Rightarrow D = \frac{2 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.049 \text{ m}} = 400.41 \text{ Nm}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{400.41 \text{ N m}^{-1}}{2 \text{ kg}}} = 14.15 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\text{AWP: } y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{y}(t) = -\omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t)$$

$$y(0) = C_1 = -0.033 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = \omega_0 C_2 = 0.1 \text{ ms}^{-1} \Rightarrow C_2 = \frac{1 \text{ m s}^{-1}}{14.15 \text{ rad s}^{-1}} = 0.0707 \text{ m}$$

$$(a) \ y(t) = -0.033 \text{ m} \cdot \cos(14.15 \text{ rad s}^{-1} \cdot t)$$

$$+ 0.0707 \text{ m} \cdot \sin(14.15 \text{ rad s}^{-1} \cdot t)$$

$$(b) \ T = \frac{\omega_0}{2\pi} \Rightarrow T = \frac{2\pi \text{ rad}}{14.15 \text{ rad s}^{-1}} = 0.444 \text{ s}$$

$$\hat{y} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \Rightarrow \hat{y} = 0.0780 \text{ m}$$

$$\varphi = \arctan \frac{C_2}{C_1} + \pi \Rightarrow \varphi = 2.01 \text{ rad}$$



### Aufgabe 5.17

$m\ddot{y} + k\dot{y} + Dy = 0$  freie gedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \Rightarrow D = \frac{0.02 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.05 \text{ m}} = 3.92 \text{ Nm}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{3.92 \text{ N m}^{-1}}{0.02 \text{ kg}}} = 14 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\delta = \frac{k}{2m} \Rightarrow \delta = \frac{0.4 \text{ N s m}^{-1}}{2 \cdot 0.02 \text{ kg}} = 10 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \Rightarrow \omega = 9.80 \text{ rad s}^{-1}$$

AWP:

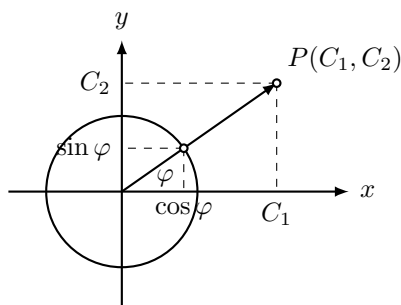
$$y(t) = e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)]$$

$$\dot{y}(t) = -\delta e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] + \omega e^{-\delta t} [-C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)]$$

$$y(0) = C_1 = 0.02 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = -\delta C_1 + \omega C_2 = 0 \text{ ms}^{-1} \Rightarrow C_2 = 0.0204 \text{ m}$$

$$y(t) = e^{-10 \text{ s}^{-1} \cdot t} [0.02 \text{ m} \cdot \cos(9.8 \text{ rad s}^{-1} \cdot t) + 0.0204 \text{ m} \cdot \sin(9.8 \text{ rad s}^{-1} \cdot t)]$$



$$\text{Amplitude: } \hat{y} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0.0286 \text{ m}$$

Phasenwinkel:  $\varphi = \arg(P) = 0.795$  (noch nicht einsetzen!)

$$\begin{aligned} y(t) &= 0.0286 \text{ m} \cdot e^{-10 \text{ s}^{-1} \cdot t} [\cos 0.795 \cdot \cos(9.8 \text{ rad s}^{-1} \cdot t) \\ &\quad + \sin 0.795 \cdot \sin(9.8 \text{ rad s}^{-1} \cdot t)] \\ &= 0.0286 \text{ m} \cdot e^{-10 \text{ s}^{-1} \cdot t} \cos(9.8 \text{ rad s}^{-1} - 0.795) \end{aligned}$$

(Phasenwinkel-Darstellung; Davon wird hier aber nur  $\hat{y}$  benötigt.)

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \quad & 0.0286 \text{ m} \cdot e^{-10t} = 0.0001 \text{ m} \\
& e^{-10t} = 0.350 \\
& -10t = \ln(0.350) \\
& t = 0.566 \text{ s}
\end{aligned}$$

### Aufgabe 5.18

freie gedämpfte Schwingung:  $m\ddot{y} + F_R + F_F = 0$

Für laminare Strömung um eine Kugel mit Radius  $r$  gilt (Stokes):

$$F_R = 6\pi\eta r v = 6\pi\eta r \dot{y}$$

zusammen mit  $F_F = D\dot{y}$  einsetzen:

$$\begin{aligned}
m\ddot{y} + 6\pi\eta r \dot{y} + D\dot{y} &= 0 \\
\ddot{y} + \frac{6\pi\eta r}{m}\dot{y} + \frac{D}{m}\dot{y} &= 0
\end{aligned}$$

Masse einer Kugel mit Dichte  $\rho$ :  $m = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} r^3$

$$\begin{aligned}
\ddot{y} + \frac{3 \cdot 6\pi\eta r}{4\pi r^3 \rho} \dot{y} + \frac{3D}{4\pi r^3 \rho} \dot{y} &= 0 \\
\ddot{y} + \frac{9\eta}{2r^2 \rho} \dot{y} + \frac{3D}{4\pi r^3 \rho} \dot{y} &= 0 \quad (\text{ok})
\end{aligned}$$

$$2\delta = \frac{9\eta}{2r^2 \rho} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{9\eta}{4r^2 \rho} = 4.16 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3D}{4\pi r^3 \rho}} = 7.00 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 5.54 \text{ s}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.13 \text{ s}$$

AWP:

$$y(t) = e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)]$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= -\delta e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] \\
&\quad + \omega e^{-\delta t} [-C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)]
\end{aligned}$$

$$y(0) = C_1 = 0.04 \text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = -\delta C_1 + \omega C_2 = 0 \text{ ms}^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.0307 \text{ m}$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= e^{-4.16 \text{ s}^{-1} \cdot t} [0.04 \text{ m} \cdot \cos(5.54 \text{ rad s}^{-1} \cdot t) \\
&\quad + 0.0307 \text{ m} \cdot \sin(5.54 \text{ rad s}^{-1} \cdot t)]
\end{aligned}$$

### Aufgabe 5.19

Da ein Auto normalerweise 4 Räder hat, muss jeder Stossdämpfer nur  $m = 200 \text{ kg}$  dämpfen.

Dämpfungskonstante:  $k = 1500 \text{ N s m}^{-1}$

$$\delta = \frac{k}{2m} = 3.75 \text{ s}^{-1}$$

Federkonstante:  $D = 16\,000 \text{ N m}^{-1}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 8.94 \text{ s}^{-1}$$

Kreisfrequenz:  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 8.12 \text{ s}^{-1}$

$$\text{Periode: } T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.774 \text{ s}$$

Abklingfaktor:  $e^{-3.75 \text{ s}^{-1} \cdot t} = 0.0235^t$

### Aufgabe 5.20

Wir erhalten kritische Dämpfung, wenn die charakteristische Gleichung genau eine Lösung besitzt. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $D = b^2 - 4ac = 0$  gilt.

Für die DGL in der physikfreundlichen Form

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

lautet die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

und die obige Bedingung somit

$$D = b^2 - 4ac = 4\delta^2 - 4\omega_0^2 = 4(\delta^2 - \omega_0^2) = 0$$

Also muss bei kritischer Dämpfung  $\delta = \omega_0$  gelten.

Das kann man natürlich auch direkt aus der Formelsammlung herauslesen.

$$\delta = \omega_0$$

$$\frac{k}{2m} = \omega_0$$

$$k = 2m \cdot \omega_0$$

$$m = \frac{F_G}{g} = \frac{39.2 \text{ N}}{9.81 \text{ ms}^{-2}} = 4 \text{ kg}$$

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{F_G}{\Delta y \cdot m}} = \sqrt{\frac{m \cdot g}{\Delta y \cdot m}} \\ &= \sqrt{\frac{g}{\Delta y}} = \sqrt{\frac{9.81 \text{ ms}^{-2}}{0.04 \text{ m}}} = 15.6 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

$$k = 2m\omega_0 = 2 \cdot 4 \cdot 15.6 \text{ kg s}^{-1} = 125.16 \text{ kg s}^{-1} = 125.16 \text{ N s m}^{-1}$$

### Aufgabe 5.21

Formelsammlung S. 99 (Summen und Produkte)

$$(a) \cos 9t - \cos 7t = -2 \sin(8t) \cdot \sin(t)$$

$$(b) \sin 7t - \sin 3t = 2 \cos(5t) \cdot \sin(2t)$$

$$(c) \cos \pi t + \cos 2\pi t = 2 \cos \frac{3\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2}$$

$$(d) \sin 3.6t + \sin 3.2t = 2 \sin(3.4t) \cdot \cos(0.2t)$$

### Aufgabe 5.22

$$(a) m\ddot{y} + Dy = F_0 \cos \omega_1 t$$

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = \frac{F_0}{m} \cos \omega_1 t$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{40 \text{ N} \cdot \text{s}}{0.1 \text{ kg} \cdot \text{m}}} = 20 \text{ s}^{-1}$$

$$A = \frac{F_0}{m} = \frac{10 \text{ N}}{0.1 \text{ kg}} = 100 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$y_h(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t = C_1 \cos 20t + C_2 \sin 20t$$

$$y_p(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cdot \cos \omega_1 t = \frac{25}{19} \cos 18t$$

$$y(t) = C_1 \cos 20t + C_2 \sin 20t + \frac{25}{19} \cos 18t$$

$$\dot{y}(t) = -20C_1 \sin 20t + 20C_2 \cos 20t - \frac{25}{19} \cdot 18 \cdot \sin 18t$$

Lösung des Anfangswertproblems:

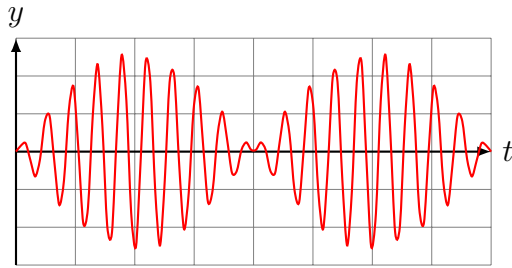
$$y(0) = C_1 + \frac{25}{19} = 0$$

$$\dot{y}(0) = 20C_2 = 0$$

$$\text{Also: } C_1 = -\frac{25}{19}, C_2 = 0$$

$$y(t) = \frac{25}{19}(\cos 18t - \cos 20t) \text{ m}$$

$$(b) \begin{aligned} y(t) &= \frac{25}{19}(\cos 18t - \cos 20t) \\ &= \frac{25}{19} \cdot (-2) \cdot \sin t \cdot \sin(-19t) \\ &= \frac{50}{19} \cdot \sin t \cdot \sin 19t \end{aligned}$$



### Aufgabe 5.23

Gegeben :  $m = 0.5 \text{ kg}$ ,  $\Delta y = 0.49 \text{ m}$ ,  $k = 2 \text{ N s m}^{-1}$

$$D = \frac{F_G}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \Rightarrow D = \frac{0.5 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2}}{0.49 \text{ m}} = 10.0 \text{ N m}^{-1}$$

$$\delta = \frac{k}{2m} = \frac{2 \text{ N s m}^{-1}}{2 \cdot 0.5 \text{ kg}} \Rightarrow \delta = 2 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 4.47 \text{ s}^{-1}$$

Resonanz tritt dann ein, wenn die Amplitude in  $y_i(t)$

$$\frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2) + 4\delta^2\omega_1^2}}$$

ein Maximum für  $\omega_1$  hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2) + 4\delta^2\omega_1^2$$

für  $\omega_1$  minimal wird:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega_1}(\omega_0^2 - \omega_1^2) + 4\delta^2\omega_1 &= 0 \\ 2(\omega_0^2 - \omega_1^2) \cdot (-2\omega_1) + 4\delta^2 \cdot 2\omega_1 &= 0 \\ 4\omega_1^2(\omega_1^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2) &= 0 \end{aligned}$$

Da  $\omega_1 = 0$  keine interessante Lösung darstellt, muss der zweite Faktor verschwinden:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2 &= 0 \\ \omega_1 &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \end{aligned}$$

Diese Minimalstelle existiert aber nur dann, wenn  $\delta < \omega_0/\sqrt{2}$  gilt. Ist das bei unserem Beispiel erfüllt?

$$2 \text{ s}^{-1} < \frac{4.47}{\sqrt{2}} \text{ s}^{-1} = 3.16 \text{ s}^{-1} \quad (\text{ok})$$

Resonanzfrequenz:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = 3.46 \text{ s}^{-1}$$