

**Aufgabe 5.1**

Bestimme die Lösung des AWP:  $y'' - 6y' + 9y = 0$  mit  $y(0) = 2$  und  $y'(0) = -1$ .

**Aufgabe 5.2**

Bestimme die Lösung des AWP:  $y'' - \frac{1}{6}y' - \frac{1}{6}y = 0$  mit  $y(0) = 0$  und  $y'(0) = 5$ .

**Aufgabe 5.3**

Bestimme die Lösung des AWP:  $y'' + 2y' + 10y = 0$  mit  $y(0) = 6$  und  $y'(0) = 0$ .

**Aufgabe 5.4**

Bestimme die Lösung des AWP:  $y'' + 2y' = 0$  mit  $y(0) = 3$  und  $y'(0) = 2$ .

**Aufgabe 5.5**

Bestimme die Lösung des AWP:  $y'' + 16y = 0$  mit  $y(0) = 2$  und  $y'(0) = -4$ .

**Aufgabe 5.6**

Stelle den trigonometrischen Term  $2 \sin \omega t + 3 \cos \omega t$  in der Form

$$(a) A \sin(\omega t + \gamma), \quad (b) A \cos(\omega t + \delta)$$

dar. Die Winkel sind jeweils im Bogenmass anzugeben.

**Aufgabe 5.7**

Zeige, dass die Funktionen  $y_1(x) = C_1 e^{-\frac{b}{2a}x}$  und  $y_2(x) = C_2 x e^{-\frac{b}{2a}x}$  jeweils die DGL  $ay'' + by' + cy = 0$  lösen, wenn die Koeffizienten die Bedingung  $b^2 - 4ac = 0$  erfüllen.

**Aufgabe 5.8**

Wie lautet die Lösung der Differentialgleichung der erzwungenen *ungedämpften* Schwingung für  $\omega_0 \neq \omega_1$ .

**Aufgabe 5.9**

Zeige, dass  $y(t) = \frac{A}{2\omega_0} t \cdot \sin \omega_0 t$  eine partikuläre Lösung der DGL der erzwungenen ungedämpften Schwingung für  $\omega_0 = \omega_1$  ist.

### Aufgabe 5.10

Bestimme die Lösung der Gleichung  $y'' - 4y' + 3y = 6x^2 + 5x + 3$  mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Verwende dazu den Ansatz  $y(x) = Ax^2 + Bx + C$ .

### Aufgabe 5.11

Beschreibe qualitativ und vollständig den zur DGL gehörenden Typ der Schwingung.

- (a)  $\ddot{y} + 4y = 0$
- (b)  $\ddot{y} + 7\dot{y} + 12y = 0$
- (c)  $\ddot{y} + 4\dot{y} + 13y = 5 \cos(5t)$

### Aufgabe 5.12

eine Kraft von 0.5 N verlängere die Feder eines ungedämpften harmonischen Oszillators um 10 cm. An der entspannten Feder werde nun eine Masse von 250 Gramm befestigt, die Feder werde um 5 cm ausgedehnt und dann losgelassen.

- (a) Wie gross ist die Federkonstante?
- (b) Berechne die Kreisfrequenz, die Frequenz und die Schwingungsdauer des Oszillators.
- (c) Bestimme sein Zeit-Weg-Gesetz  $y(t)$ .

### Aufgabe 5.13

Ein ungedämpfter harmonischer Oszillator mit der Masse 2 kg habe eine Schwingungsdauer von 3 s. Berechne die Federkonstante.

### Aufgabe 5.14

Eine Kraft von  $6 \cdot 10^{-4}$  N strecke eine Feder um 3 cm. An die (entspannte) Feder werde eine Stahlkugel mit einer Masse von 2 Gramm gehängt. Nach Erreichen der statischen Ruhelage werde die Kugel 4 cm über diese Ruhelage gehoben und dann losgelassen.

- (a) Bestimme die Amplitude und die Frequenz der Schwingung.
- (b) Gib das Weg-Zeit-Gesetz an.
- (c) Zu welchen Zeiten ist die Kugel 2 cm über der statischen Ruhelage und wie gross ist dort ihre Geschwindigkeit?

*Hinweis:* Grundsätzlich müsste man unter dem Einfluss der Schwerkraft im reibungsfreien Fall die DGL  $\ddot{y} + \frac{D}{m}y = g$  lösen. Mit der Transformation  $y = u + \frac{mg}{D}$  erhält man  $\ddot{u} + \frac{D}{m}(u + \frac{mg}{D}) = g$  bzw.  $\ddot{u} + \frac{D}{m}u = 0$ . Wählt man also die statische Ruhelage als Nullpunkt, verschwindet die Schwerkraft aus der Rechnung.

### Aufgabe 5.15

Eine Masse von 100 g dehnt eine Feder um 5 cm. Die Masse wird aus ihrer Gleichgewichtslage mit einer Geschwindigkeit von  $10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  nach unten in Bewegung gesetzt. Der Luftwiderstand kann dabei vernachlässigt werden.

- (a) Bestime die Position  $y(t)$  der Masse zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t \geq 0$ .
- (b) Wann durchläuft die Masse zum ersten Mal ihre Gleichgewichtslage?

### Aufgabe 5.16

Eine Masse von 2 kg dehnt eine Feder um 4.9 cm. Die Masse wird um 3.3 cm angehoben und anschliessend mit einer Geschwindigkeit von  $1 \text{ m s}^{-1}$  nach unten in Bewegung gesetzt. Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.

- (a) Berechne den Ort der Masse zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t \geq 0$ .
- (b) Bestimme die Kreisfrequenz, die Periode, die Amplitude und den Phasenwinkel der Bewegung.

### Aufgabe 5.17

Eine Masse von 20 Gramm dehnt in der Ruhelage eine vertikale Feder um 5 cm. Die Masse wird dann noch weitere 2 cm nach unten gezogen und losgelassen. Die nun einsetzende Schwingung findet in einem Medium statt, dass der Bewegung eine Dämpfung von  $0.4 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$  aufzwingt.

- (a) Berechne die Wegfunktion  $y(t)$  in Abhängigkeit der Zeit  $t \geq 0$  (bezogen auf die statische Ruhelage als Nullpunkt).
- (b) Nach wie vielen Sekunden ist die Elongation kleiner als 0.1 mm?

### Aufgabe 5.18

Eine Stahlkugel mit dem Radius  $r = 1 \text{ cm}$  und der Dichte  $\rho = 8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  wird an einer Feder mit der Federkonstanten  $D = 1.6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  aufgehängt. Die gesamte Vorrichtung befindet sich in einer Flüssigkeit mit der Viskosität  $\eta = 1.48 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ .

- (a) Zeige, dass sich die Bewegung mit der folgenden DGL beschreiben lässt:

$$\ddot{y} + \frac{9\eta}{2r^2\rho}\dot{y} + \frac{3D}{4\pi r^3\rho}y = 0$$

*Hinweis:* Gesetz von Stokes

- (b) Die Kugel werde aus der statischen Ruhelage 4 cm nach unten gezogen und dann losgelassen. Bestimme das Weg-Zeit-Gesetz  $y(t)$  und die Schwingungsdauer  $T$ .

### Aufgabe 5.19

Ein Kleinwagen hat eine Masse von 800 kg. Seine Stossdämpfer haben eine Dämpfung von  $1500 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$  bei einer Federkonstante mit dem Wert  $16\,000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ . Das Auto wird durch einen Stoss aus seiner vertikalen Ruhelage bewegt. Berechne die Schwingungsdauer und den Faktor, mit dem die Schwingung abklingt.

### Aufgabe 5.20

Eine Masse mit einer Gewichtskraft von 39.2 N dehnt eine Feder um 4 cm. Die Bewegung der Masse wird durch eine Vorrichtung mit dem Faktor  $k$  gedämpft. Berechne den Wert von  $k$ , für den das System kritisch gedämpft ist.

### Aufgabe 5.21

Schreibe den Ausdruck als Produkt zweier trigonometrischer Funktionen.

(a)  $\cos 9t - \cos 7t$

(c)  $\cos \pi t + \cos 2\pi t$

(b)  $\sin 7t - \sin 3t$

(d)  $\sin 3.6t + \sin 3.2t$

### Aufgabe 5.22

Eine Masse von 0.1 kg ist vertikal an einer Feder mit der Federkonstanten  $D = 40 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  befestigt und befindet sich in Ruhe. Auf die Masse wirkt nun eine äussere Kraft von  $10 \cos(18t) \text{ N}$ .

(a) Bestimme die Position der Masse als Funktion  $y(t)$  der Zeit  $t \geq 0$ .

(b) Zeige, dass es sich um eine Schwebung handelt, indem du die Bewegungsgleichung in ein Produkt umformst und damit die Kreisfrequenzen der Überlagerungsschwingung und der Einhüllenden bestimmst. *Hinweis:* Skizziere mit dem Taschenrechner die Weg-Zeit-Funktion  $y(t)$  für  $0 \leq t < 2\pi$  und  $-3 \leq y \leq 3$ .

### Aufgabe 5.23

Eine Feder werde durch eine angehängte Masse von 0.5 kg um 0.49 m gedehnt. Das Feder-Masse-System befinde sich in einem Medium, dessen Reibungswiderstand  $k = 2 \text{ N s m}^{-1}$  beträgt. Die in ihrer statischen Ruhelage ruhende Masse werde durch eine periodische Kraft gestört.

Zeige, dass Resonanz auftreten kann und berechne die Resonanzfrequenz  $\omega_R$ .