Aufgabe 5.1

(a) $\det\begin{pmatrix} x+2 & x-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (x+2)\cdot 1 - (x-1)\cdot 1$

$$= x+2-x+1 = 3$$

Die Wronski-Determinante ist nicht für alle Wert von x null; somit sind die zwei Funktionen *linear unabhängig.*

(b) $\det\begin{pmatrix} x+2 & x-1 & x \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Der Wert der Determinante ist null, da die zugehörige Matrix eine Nullzeile hat. Dies lässt sich auch durch eine explizite Rechnung überprüfen (Formelsammlung, Seite 31).

Die Wronski-Determinante ist für alle Werte von x null; somit sind die drei Funktionen *linear abhängig.*

Aufgabe 5.2

(a) $2y'' + 6y' + 4y = 0$

charakteristische Gleichung: $2\lambda^2 + 6\lambda + 4 = 0$

Lösungen: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$

$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

(b) $y'' - 4y' + 4y = 0$

charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

Lösungen: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$y_1 = e^{2x}$ ist kein Fundamentalsystem

Man kann zeigen, dass $y_2 = xe^{2x}$ eine zweite, linear unabhängige Lösung der DGL ist. Somit

$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$

(c) $y'' - 6y' + 13y = 0$

charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$

Lösungen: $\lambda_1 = 3 + 2i$, $\lambda_2 = 3 - 2i$

$y(x) = C_1 e^{(3+2i)x} + C_1 e^{(3-2i)x} = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{3x}$

Aufgabe 5.3

Klammere $A = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$ aus dem Funktionsterm aus:

$$y(x) = \sqrt{29}\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\sin 3x + \frac{5}{\sqrt{29}}\cos 3x\right)$$

Grund: für $\frac{2}{\sqrt{29}}$ und $\frac{5}{\sqrt{29}}$ gilt nach Konstruktion:

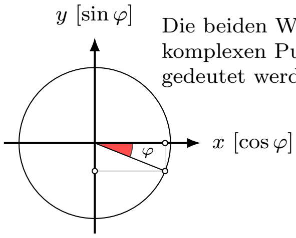
$$\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^2 = \frac{4}{29} + \frac{25}{29} = \frac{29}{29} = 1$$

(a) Additionstheorem: (Formelsammlung S. 99)

$$\cos(3x + \varphi) = \cos(3x)\cos(\varphi) - \sin(3x)\sin(\varphi)$$

Koeffizientenvergleich mit $\frac{2}{\sqrt{29}}\sin(3x) + \frac{5}{\sqrt{29}}\cos(3x)$:

$$\begin{aligned} -\sin(\varphi) &= \frac{2}{\sqrt{29}} \\ \cos(\varphi) &= \frac{5}{\sqrt{29}} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \cos(\varphi) &= \frac{5}{\sqrt{29}} \\ \sin(\varphi) &= -\frac{2}{\sqrt{29}} \end{aligned}$$



Die beiden Werte können als Koordinaten eines komplexen Punktes auf dem Einheitskreis gedeutet werden.

$\arg(5 - 2\mathrm{i}) = -0.3805\,\mathrm{rad}$ $\quad$ [TI-84: `angle R▶ θ(5,-2)`]

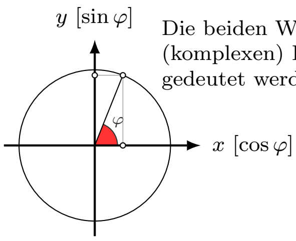
$$y(x) = \sqrt{29}\cos(3x - 0.3805)$$

(b) Additionstheorem: (Formelsammlung S. 99)

$$\sin(3x + \varphi) = \sin(3x)\cos(\varphi) + \cos(3x)\sin(\varphi)$$

Koeffizientenvergleich mit $\frac{2}{\sqrt{29}}\sin(3x) + \frac{5}{\sqrt{29}}\cos(3x)$:

$$\cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{29}};\ \sin(\varphi) = \frac{5}{\sqrt{29}}$$



Die beiden Werte können als Koordinaten eines (komplexen) Punktes auf dem Einheitskreis gedeutet werden.

$\arg(2 + 5\mathrm{i}) = 1.190\,\mathrm{rad}$ $\quad$ [TI-84: `angle R▶ θ(2,5i)`]

$$y(x) = \sqrt{29}\sin(3x + 1.190)$$

Aufgabe 5.4

charakteristische Gleichung: $\lambda^4 - 5\lambda^3 + 5\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$

Lösungen (TI-84): $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = -1$

$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 \mathrm{e}^{2x} + C_3 \mathrm{e}^{x} + C_4 \mathrm{e}^{-x}$

Aufgabe 5.5

(a) $\ddot{y} + 6\dot{y} + 4y = 0$

$\omega_0^2 - \delta^2 = 4 - 3^2 = -5 < 0$

gedämpfte Schwingung mit starker Dämpfung

(b) $\ddot{y} - 5y = 0$

keine Schwingung ($\omega_0^2 = -5$)

(c) $\ddot{y} + 4\dot{y} + 9y = 0$

$\omega_0^2 - \delta^2 = 9 - 2^2 = 5 > 0$

gedämpfte Schwingung mit schwacher Dämpfung

(d) $\ddot{y} + y = 0$

ungedämpfte Schwingung

(e) $\ddot{y} + 8\dot{y} + 16y = 0$

$\omega_0^2 - \delta^2 = 16 - 4^2 = 0$

gedämpfte Schwingung mit kritischer Dämpfung

Aufgabe 5.6

- Bestimme die allgemeine Lösung y_h der zugehörigen homogenen DGL,
- Bestimme eine spezielle (partikuläre) Lösung y_i der inhomogen DGL,
- Bestimme $y = y_h + y_i$.

Aufgabe 5.7

(a)

- *allgemeine Lösung der homogenen DGL:*

  $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -3$

  $y_h(x) = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{-3x}$

- *partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:*

  Ansatz: $y_i = A\mathrm{e}^{-4x}$; $y_i' = -4A\mathrm{e}^{-4x}$; $y_i'' = 16A\mathrm{e}^{-4x}$

  $$\begin{aligned} y'' + 2y' - 3y &= 10\mathrm{e}^{-4x} \\ 16A\mathrm{e}^{-4x} - 8A\mathrm{e}^{-4x} - 3A\mathrm{e}^{-4x} &= 10\mathrm{e}^{-4x} \\ 5A\mathrm{e}^{-4x} &= 10\mathrm{e}^{-4x} \\ A &= 2 \quad \text{(Koeffizientenvergleich)} \end{aligned}$$

  $y_i(x) = 2\mathrm{e}^{-4x}$

- Lösungen superponieren (addieren):

  $y(x) = y_h(x) + y_i(x) = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-3x} + 2\mathrm{e}^{-4x}$

(b)

- $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -2 + \mathrm{i},\ y_2 = -2 - \mathrm{i}$

  $y_h(x) = C_1\mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i})x} + C_2\mathrm{e}^{(-2-\mathrm{i})x} = (C_1 \sin x + C_2 \cos x)\mathrm{e}^{-2x}$

- Ansatz: $y_i = A\sin 3x + B\cos 3x$ (Reihenfolge egal)

  $$\begin{aligned} y_i' &= 3A\cos 3x - 3B\sin 3x \\ y_i'' &= -9A\sin 3x - 9B\cos 3x \end{aligned}$$

  y_i für y in die DGL $y'' + 4y' + 5y = 10\cos 3x$ einsetzen:

  $(-9A\sin 3x - 9B\cos 3x) + 12(A\cos 3x - B\sin 3x) + 5(A\sin 3x + B\cos 3x) = 10\cos 3x$

  Ausmultiplizieren, $\cos 3x$ bzw. $\sin 3x$ ausklammern und dann zusammenfassen:

  $$\begin{aligned} (-9B + 12A + 5B)\cos 3x + (-9A - 12B + 5A)\sin 3x &= 10\cos 3x \\ (12A - 4B)\cos 3x + (-4A - 12B)\sin 3x &= 10\cos 3x \end{aligned}$$

  Koeffizientenvergleich: $12A - 4B = 10$

  $-4A - 12B = 0$

  $A = \frac{3}{4},\ B = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad y_i(x) = \frac{3}{4}\sin 3x - \frac{1}{4}\cos 3x$

- $y(x) = (C_1\sin x + C_2\cos x)\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{4}\sin 3x - \frac{1}{4}\cos 3x$

Aufgabe 5.8

$$\ddot{y} + \frac{5}{2}\,\mathrm{s}^{-1}\,\dot{y} + 9\,\mathrm{s}^{-2}y = 3\,\mathrm{m\,s}^{-2}\,\cos(2\,\mathrm{s}^{-1}\,\mathrm{rad}\,t)$$

(a) $\delta = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\,\mathrm{s}^{-1} = \frac{5}{4}\,\mathrm{s}^{-1}$; $\omega_0 = \sqrt{9\,\mathrm{s}^{-2}} = 3\,\mathrm{s}^{-1}\,\mathrm{rad}$

$A = 3\,\mathrm{m\,s}^{-2}$; $\omega_1 = 2\,\mathrm{s}^{-1}\,\mathrm{rad}$

$$\frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2+4\delta^2\omega_1^2}} = \frac{3\,\mathrm{m\,s}^{-2}}{\sqrt{25\,\mathrm{s}^{-4}+4\cdot\frac{25}{16}\,\mathrm{s}^{-2}\cdot 4\,\mathrm{s}^{-2}}}$$

$$= \frac{3\,\mathrm{m\,s}^{-2}}{\sqrt{50\,\mathrm{s}^{-4}}} = \frac{3}{5\sqrt{2}}\,\mathrm{m}$$

$$\tan\gamma = \frac{2\delta\omega_1}{\omega_1^2-\omega_0^2} = \frac{2\cdot\frac{5}{4}\,\mathrm{s}^{-1}\cdot 2\,\mathrm{s}^{-1}}{4\,\mathrm{s}^{-2}-9\,\mathrm{s}^{-2}} = -1 \quad \Rightarrow \gamma = -\frac{\pi}{4}$$

stationäre Lösung: $y_s(t) = \frac{3}{5\sqrt{2}}\,\mathrm{m}\,\cos\left(2\,\mathrm{s}^{-1}\,\mathrm{rad}\,t - \frac{\pi}{4}\right)$

(b) Die Amplitude

$$\frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2+4\delta^2\omega_1^2}}$$

wird maximal, wenn ihr Nenner

$$\sqrt{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2+4\delta^2\omega_1^2}$$

minimal wird. Dies ist dann der Fall, wenn der Radikand

$$R(\omega_1) = (\omega_0^2-\omega_1^2)^2+4\delta^2\omega_1^2$$

minimal wird.

$$\begin{aligned} R'(\omega_1) = 2(\omega_0^2-\omega_1^2)\cdot(-2\omega_1)+8\delta^2\omega_1 &= 0 \quad ||:(-4) \\ (\omega_0^2-\omega_1^2)\omega_1 - 2\delta^2\omega_1 &= 0 \quad ||:\omega_1\neq 0 \\ \omega_0^2-\omega_1^2-2\delta^2 &= 0 \\ \omega_1 &= \sqrt{\omega_0^2-2\delta^2} \end{aligned}$$

Resonanzfrequenz:

$$\omega_R = \sqrt{9s^{-2}-2\cdot\frac{25}{16}\,\mathrm{s}^{-2}} = \sqrt{\frac{47}{8}\,\mathrm{s}^{-1}} = 2.42\,\mathrm{s}^{-1}\,\mathrm{rad}$$

Aufgabe 5.9

(a) $\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} + \frac{D}{m} = 0$

$$\delta = \frac{k}{2m} = \frac{1.8}{2 \cdot 1.5}\,\frac{\mathrm{N\,s\,m^{-1}}}{\mathrm{kg}} = 0.6\,\mathrm{s^{-1}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{150}{1.5}\,\frac{\mathrm{N\,m^{-1}}}{\mathrm{kg}}} = \sqrt{100\,\mathrm{s^{-2}}} = 10\,\mathrm{s^{-1}\,rad}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{100\,\mathrm{s^{-2}} - 0.36\,\mathrm{s^{-2}}} = 9.982\,\mathrm{s^{-1}\,rad}$$

(b) $y(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t)$ Formelsammlung

$$\dot{y}(t) = -\delta\mathrm{e}^{-\delta t}(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t) + \mathrm{e}^{-\delta t}(-\omega C_1 \sin\omega t + \omega C_2 \cos\omega t)$$

$$y(0) = C_1 = y_0$$

$$\dot{y}(0) = -\delta C_1 + \omega C_2 = v_0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{v_0 + \delta C_1}{\omega}$$

Werte berechnen und einsetzen:

$$y(t) = \mathrm{e}^{-0.06\,\mathrm{s^{-1}}\,t}\big(0.001\,\mathrm{m}\cos(9.982\,\mathrm{s^{-1}\,rad}\,t) + 0.0019\,\mathrm{m}\sin(9.982\,\mathrm{s^{-1}\,rad}\,t)\big)$$