Aufgabe 5.1

Untersuche mit der Wronski-Determinante, ob die Funktionen ein Fundamentalystem bilden.

(a) $f(x) = x + 2$, $g(x) = x - 1$

(b) $f(x) = x + 2$, $g(x) = x - 1$, $h(x) = x$

Aufgabe 5.2

Bestimme die allgemeine Lösung der DGL.

(a) $2y'' + 6y' + 4y = 0$

(b) $y'' - 4y' + 4y = 0$

(c) $y'' - 6y' + 13y = 0$

Aufgabe 5.3

Stelle die Funktion $y(x) = 2\sin(3x) + 5\cos(3x)$ in der folgenden Form dar.

(a) $y(x) = A\cos(3x + \varphi)$

(b) $y(x) = A\sin(3x + \varphi)$

Aufgabe 5.4

Bestimme die allgemeine Lösung der DGL $y^{(4)} - 5y''' + 5y'' + 5y' - 6y = 0$.

Aufgabe 5.5

Welche Art von Schwingung wird durch die Differentialgleichung modelliert? Beschreibe auch den Typ einer allfälligen Dämpfung Die SI-Einheiten der Koeffizienten sind weggelassen.

(a) $\ddot{y} + 6\dot{y} + 4y = 0$

(b) $\ddot{y} - 5y = 0$

(c) $\ddot{y} + 4\dot{y} + 9y = 0$

(d) $\ddot{y} + y = 0$

(e) $\ddot{y} + 8\dot{y} + 16y = 0$

Aufgabe 5.6

Beschreibe, wie man generell eine inhomogene lineare DGL beliebiger Ordnung löst.

Aufgabe 5.7

Löse die folgenden DGL mit einem geeigneten Ansatz.

(a) $y'' + 2y' - 3y = 10\mathrm{e}^{-4x}$

(b) $y'' + 4y' + 5y = 10\cos(3x)$

Aufgabe 5.8

Gegeben ist die DGL einer erzwungenen gedämpften Schwingung:

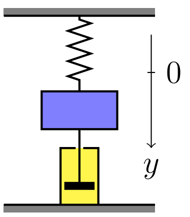
$$\ddot{y} + \frac{5}{2}\,\mathrm{s}^{-1}\,\dot{y} + 9\,\mathrm{s}^{-2}y = 3\,\mathrm{m\,s}^{-2}\,\cos(2\,\mathrm{s}^{-1}\,\mathrm{rad}\,t)$$

(a) Bestimme die exakte stationäre Lösung der DGL mit Hilfe der Formelsammlung. (Bei der *stationären* Schwingung schwingt der Oszillator nur noch mit der Kreisfrequenz der Störfunktion nachdem der Anteil der freien gedämpften Schwingung abgeklungen ist.)

(b) Für welche Kreisfrequenz der Störfunktion würde die Amplitude der stationären Lösung maximal?

Aufgabe 5.9

Eine Masse von $1.5\,\mathrm{kg}$ hängt an einer Feder mit der Federkonstante $150\,\mathrm{N\,m}^{-1}$ und wird durch einen Kolben, der sich in einem Ölbad befindet, mit dem Faktor $k = 1.8\,\mathrm{Ns\,m}^{-1}$ gedämpft.



(a) Modelliere die vorliegende Situation durch eine geeignete Differenzialgleichung und berechne die Werte der Koeffizienten. Die Masse der Dämpfungsvorrichtung kann vernachlässigt werden.

(b) Bestimme die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen $y_0 = 1.5\,\mathrm{mm}$ und $v_0 = 10\,\mathrm{mm\,s}^{-1}$.