Aufgabe 1.1

(a) $N(30) = N(0) \cdot \mathrm{e}^{30\alpha} = 329$
$N(90) = N(0) \cdot \mathrm{e}^{90\alpha} = 2684$

$$\frac{N(90)}{N(30)} = \frac{\mathrm{e}^{90\alpha}}{\mathrm{e}^{30\alpha}} = \frac{2684}{329}$$

$$\mathrm{e}^{60\alpha} = 2684/329$$

$$60\alpha = \ln(2684/329)$$

$$\alpha = 0.03498$$

$$\delta = \ln 2/\alpha = 19.81\,\text{Minuten}$$

(b) $N(300) = N(90) \cdot \mathrm{e}^{\alpha \cdot 210} = 4\,162\,322\,\text{Bakterien}$

Aufgabe 1.2

Verdoppelungszeit: $\delta = \ln 2/\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \ln 2/\delta$

$N(t) = 10^2 \cdot \mathrm{e}^{\alpha t} = 10^2 \cdot \mathrm{e}^{\ln 2/\delta \cdot t} = 10^6$

$\mathrm{e}^{\ln 2/\delta \cdot t} = 10^4$

$\ln 2/\delta \cdot t = 4 \ln 10$

$$t = \frac{4\delta \ln 10}{\ln 2} = 130.2\,\text{Minuten}$$

Aufgabe 1.3

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{5}P - \frac{1}{5175}P^2 = \frac{1}{5175}P\,(1035 - P) \qquad (t \text{ in Tagen})$$

Lösung der DGL mit $c = 5175^{-1}$ und $G = 1035$: (FTB, S. 67)

$$P(t) = \frac{1035}{1 + a \cdot 1035\mathrm{e}^{-1/5 \cdot t}}$$

$$P(0) = \frac{1035}{1 + 1035a \cdot \mathrm{e}^{0}} = 10 \qquad \Rightarrow \qquad a = 41/414 \approx 0.099$$

$$P(t) = \frac{1035}{1 + 102.5\mathrm{e}^{-0.2t}}$$

- $1 + 102.5\mathrm{e}^{-0.2t}$ monoton fallend $\Rightarrow$ $P(t)$ monoton wachsend
- $\lim\limits_{t \to \infty} P(t) = 1035$
- $P(12) = 100$ Fruchtfliegen
- $$\begin{aligned} P(t) &= G/2 \\ \frac{1035}{1 + 102.5\mathrm{e}^{-0.2t}} &= \frac{1035}{2} \\ 102.5\mathrm{e}^{-0.2t} &= 1 \\ -0.2t &= -\ln 102.5 \\ t &= 23.15\,\text{Tage} \\ P(23.15) &\approx 518\,\text{Fruchtfliegen} \end{aligned}$$

Aufgabe 1.4

$N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad (t \text{ in Jahren})$

Nach einem Jahr ($t = 1$) ist noch $100\% - 2.3\% = 97.7\%$ der Masse vorhanden:

$$\begin{aligned} N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot 1} &= 0.977 N_0 \\ \mathrm{e}^{-\lambda} &= 0.977 \\ -\lambda &= \ln 0.977 \\ \lambda &= -\ln 0.977 \approx 0.0233 \end{aligned}$$

Halbwertszeit: $t_{1/2} = \ln(2)/\lambda \approx 29.8\,\mathrm{a}$

Aufgabe 1.5

$N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad (t \text{ in Stunden})$

Halbwertszeit: $t_{0.5} = \ln(2)/\lambda$

$$\lambda = \ln(2)/t_{0.5} = 0.05567$$

(a) $N(10) = 0.573$ (57.3%)

(b) $$\begin{aligned} N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t} &= 0.95 N_0 \\ \mathrm{e}^{-\lambda t} &= 0.95 \\ -\lambda t &= \ln 0.95 \\ t &= -\ln 0.95/\lambda \approx 0.921\,\mathrm{h} \end{aligned}$$

Aufgabe 1.6

Halbwertszeit: $\tau = \log(2)/\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \log(2)/\tau$

$$\begin{aligned} N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t} &= 0.0001 N_0 \\ \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t} &= 0.0001 \\ -\lambda \cdot t &= \ln 0.0001 \\ \lambda t &= -\ln 0.0001 = \ln 0.0001^{-1} = \ln 10\,000 \\ t &= \frac{\ln 10\,000}{\lambda} = \frac{\ln 10\,000 \cdot \tau}{\ln 2} \approx 13.3\tau \end{aligned}$$

(a) Strontium-90: $13.3 \cdot 28\,\mathrm{a} = 372\,\mathrm{a}$

(b) Radium-226: $13.3 \cdot 1620\,\mathrm{a} = 21\,546\,\mathrm{a}$

(c) Plutonium-239: $13.3 \cdot 24\,360\,\mathrm{a} = 323\,988\,\mathrm{a}$

Aufgabe 1.7

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v &= -\lambda \cdot v \cdot \mathrm{d}t \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -\lambda \cdot v \\ \dot{v} &= -\lambda \cdot v \end{aligned}$$

Ansatz: $v(t) = C\mathrm{e}^{-\lambda t}$

Kontrolle: $\dot{v}(t) = -\lambda C \mathrm{e}^{-\lambda t} = -v(t) \qquad$ (ok)

Anfangswertproblem: $v_0 = v(0) = C$

Insgesamt: $v(t) = v_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$

Aufgabe 1.8

$$\mathrm{d}I = -\lambda \cdot I \cdot \mathrm{d}x$$
$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = -\lambda \cdot I$$
$$\dot{I} = -\lambda \cdot I$$

Ansatz: $I(x) = C\mathrm{e}^{-\lambda x}$

Kontrolle: $\dot{I}(x) = -\lambda C\mathrm{e}^{-\lambda x} = -I(x) \quad \text{(ok)}$

Anfangswertproblem: $I_0 = I(0) = C$

Insgesamt: $I(x) = I_0\mathrm{e}^{-\lambda x}$

$\lambda = 1.4\,\mathrm{m}^{-1}$:

x	$I(x)/I_0$
1 m	24.66%
2 m	6.08%
3 m	1.50%
4 m	0.37%

$\lambda = 2.0\,\mathrm{m}^{-1}$:

x	$I(x)/I_0$
1 m	13.53%
2 m	1.83%
3 m	0.25%
4 m	0.03%

Halbwertslänge: Wassertiefe, bei der das Licht 50% seiner Intensität (gegenüber der Wasseroberfläche) verloren hat.

$x_{0.5} = \ln(2)/1.4\,\mathrm{m}^{-1} = 0.4951\,\mathrm{m}$

$x_{0.5} = \ln(2)/2\,\mathrm{m}^{-1} = 0.3466\,\mathrm{m}$