Lineare Algebra

Lösungen+

Aufgabe 1.1

(a) $x_1 + 5x_2 - \sqrt{2}\,x_3 = 1$ *linear*

(b) $x_1 + 3x_2 + x_1 x_2 = 2$ *nicht linear (wegen $x_1 \cdot x_2$)*

(c) $x_1 = -7x_2 + 3x_3$ *linear*

(d) $x_1^{-2} + x_2 + 8x_3 = 5$ *nicht linear (wegen x_1^{-2})*

Aufgabe 1.2

Sei k eine reelle Konstante. Welche der folgenden Gleichungen sind linear?

(a) $x_1 - x_2 + x_3 = \sin k$ *linear*

(b) $kx_1 - \frac{1}{k}x_2 = 9$ *linear*

(c) $2^k x_1 + 7x_2 - x_3 = 0$ *linear*

Aufgabe 1.3

$7x - 5y = 3$

$x = t$ und $y = \dfrac{7}{5}t - \dfrac{3}{5}$

oder

$x = \dfrac{5}{7}t + \dfrac{3}{7}$ und $y = t$

Aufgabe 1.4

$3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7.$

$x_1 = \dfrac{5}{3}s - \dfrac{4}{3}t + \dfrac{7}{3}$

$x_2 = s$

$x_3 = t$

Aufgabe 1.5

$8x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1$

$x_1 = \dfrac{1}{4}r - \dfrac{5}{8}s + \dfrac{3}{4}t - \dfrac{1}{8}$

$x_2 = r$

$x_3 = s$

$x_4 = t$

Aufgabe 1.6

$3x_1 - 8x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0$

$$x_1 = \frac{8}{3}q - \frac{2}{3}r + \frac{1}{3}s - \frac{4}{3}t$$

$$x_2 = q$$

$$x_3 = r$$

$$x_4 = s$$

$$x_5 = t$$

Aufgabe 1.7

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 3 \\ 7x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.8

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.9

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 2x_1 &= 0 \\ 3x_1 - 4x_2 &= 0 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 1.10

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 3x_1 - 2x_3 &= 5 \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 &= -3 \\ -2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Aufgabe 1.11

$$\begin{aligned} x &= 5 + 2y \\ x - 2y &= 5 \end{aligned}$$

Aufgabe 1.12

$$\begin{aligned} x &= 1 - 4y + 3z \\ x + 4y - 3z &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.1

(a) Ja (b) Ja (c) Ja

Aufgabe 2.2

(a) Ja

(b) Nein, denn die Nullzeile steht nicht am Ende der Matrix.

(c) Nein, denn die führende Eins in der zweiten Zeile steht nicht rechts von der führenden Eins in der ersten Spalte.

Aufgabe 2.3

Welche der folgenden Matrizen haben Zeilenstufenform?

(a) Ja

(b) Ja

(c) Nein, denn die dritte Zeile hat weder eine führende Eins, noch steht die Zahl rechts von derjenigen in Zeile drei.

Aufgabe 2.4

(a) reduzierte Zeilenstufenform

(b) Zeilenstufenform

Aufgabe 2.5

$x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5$

Aufgabe 2.6

$L = \{\,\}$

Wegen der letzten Zeile $(0 = 1)$ ist das System inkonsistent.

Aufgabe 2.7

$$\begin{aligned} x_1 &= 7 + 3x_2 - 4x_3 \\ x_2 &= 2 - 2x_3 \\ x_3 &= 5 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} x_1 &= -37 \\ x_2 &= -8 \\ x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Addiere das 1-fache von Zeile 1 zur Zeile 2:

Addiere das -3-fache von Zeile 1 zur Zeile 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{pmatrix}$$

Multipliziere Zeile 2 mit -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{pmatrix}$$

Addiere das 10-fache von Zeile 2 zur Zeile 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{pmatrix}$$

Multipliziere Zeile 3 mit $-\frac{1}{52}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Addiere das -2-fache von Zeile 3 zur Zeile 1:

Addiere das 5-fache von Zeile 3 zur Zeile 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Addiere das -1-fache von Zeile 2 zur Zeile 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 3$

$x_2 = 1$

$x_3 = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Multipliziere Zeile 1 mit $\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Addiere das 2-fache von Zeile 1 zur Zeile 2:

Addiere das -8-fache von Zeile 1 zur Zeile 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Multipliziere Zeile 2 mit $\frac{1}{7}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & -7 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Addiere das 7-fache von Zeile 2 zur Zeile 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Addiere das -1-fache von Zeile 2 zur Zeile 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}t$

$x_2 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}t$

$x_3 = t$

Aufgabe 2.8

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Addiere das -2-fache von Zeile 1 zur Zeile 2:

Addiere das 1-fache von Zeile 1 zur Zeile 3:

Addiere das -3-fache von Zeile 1 zur Zeile 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tausche Zeilen 2 und 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Addiere das -3-fache von Zeile 2 zur Zeile 3:

Addiere das -3-fache von Zeile 2 zur Zeile 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Addiere das 1-fache von Zeile 2 zur Zeile 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = -1 + x_4$

$x_2 = 0 + 2 \cdot x_3$

$x_3 \in \mathbb{R}$

$x_4 \in \mathbb{R}$

Aufgabe 2.9

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Multipliziere Zeile 1 mit $\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Addiere das -2-fache von Zeile 1 zur Zeile 2:

Addiere das -3-fache von Zeile 1 zur Zeile 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & \frac{13}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

Multipliziere Zeile 2 mit $\frac{1}{4}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{13}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

Addiere das $-\frac{13}{2}$-fache von Zeile 2 zur Zeile 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

Multipliziere Zeile 3 mit $-\frac{8}{7}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Addiere das 1-fache von Zeile 3 zur Zeile 1:

Addiere das $-\frac{3}{4}$-fache von Zeile 3 zur Zeile 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Addiere das $\frac{3}{2}$-fache von Zeile 2 zur Zeile 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das System ist inkonsistent

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ -6 & -4 & 2 & 30 \end{pmatrix}$$

Multipliziere Zeile 1 mit $\frac{1}{3}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -5 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ -6 & -4 & 2 & 30 \end{pmatrix}$$

Addiere das -5-fache von Zeile 1 zur Zeile 2:

Addiere das -3-fache von Zeile 1 zur Zeile 3:

Addiere das 6-fache von Zeile 1 zur Zeile 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -5 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} & 25 \\ 0 & -1 & 4 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Multipliziere Zeile 2 mit -3:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -5 \\ 0 & 1 & -11 & -75 \\ 0 & -1 & 4 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Addiere das 1-fache von Zeile 2 zur Zeile 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -5 \\ 0 & 1 & -11 & -75 \\ 0 & 0 & -7 & -49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Multipliziere Zeile 3 mit $-\frac{1}{7}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -5 \\ 0 & 1 & -11 & -75 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Addiere das $\frac{1}{3}$-fache von Zeile 3 zur Zeile 1:

Addiere das 11-fache von Zeile 3 zur Zeile 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Addiere das $-\frac{2}{3}$-fache von Zeile 2 zur Zeile 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = -4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 7$

Aufgabe 2.10

(a) Da das System mehr Variablen als Gleichung besitzt, muss es nach Satz 1.2.1 nichttriviale Lösungen haben.

(b) Das System besitzt keine nichttriviale Lösungen.

Aufgabe 2.11

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = -x_2$

$x_2 = -x_3$

$x_3 = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$

Aufgabe 2.12

$x_1 = -s,\ x_2 = -t - s,\ x_3 = 4s,\ x_4 = t$

Aufgabe 2.13

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 10 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 37 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.14

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2 - 14 & a + 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2 - 2 & a - 14 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{8} \\ 0 & -7 & a^2 - 2 & a - 14 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{8} \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{pmatrix}$$

- Keine Lösung, wenn $a^2 - 16 = 0$ und $a - 4 \neq 0$. Das ist für $a = -4$ der Fall.
- Unendlich viele Lösungen, wenn $a^2 - 16 = 0$ und $a - 4 = 0$. Das ist für $a = 4$ der Fall.
- Genau eine Lösung, wenn $a^2 - 16 \neq 0$. Das gilt für $a \neq \pm 4$.

Aufgabe 2.15

Ein homogenes lineares Gleichungssystem hat genau dann nichttriviale Lösungen, wenn seine die Zeilen linear abhängig sind. Dies ist hier genau dann der Fall, wenn $\lambda = 4$ oder $\lambda = 2$.

Aufgabe 2.16

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\begin{aligned} d &= 10 \\ a + b + c + d &= 7 \\ 27a + 9b + 3c + d &= -11 \\ 64a + 16b + 4c + d &= -14 \end{aligned}$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 10$$

Aufgabe 2.17

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ ac & ad \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.1

(a) Die Matrix BA ist nicht definiert, denn die Spaltenzahl von B stimmt nicht mit der Zeilenzahl von A überein.

(b) die Matrix $AC + D$ hat die Grösse 4×2.

(c) Die Matrix $AE + B$ ist nicht definiert, denn AE (4×4) hat nicht dieselbe Grösse wie B (4×5).

(d) Die Matrix $AB+B$ ist nicht definiert, denn die Spaltenzahl von A stimmt nicht mit der Zeilenzahl von B überein.

(e) Die Matrix $E(A + B)$ hat die Grösse 5×5.

(f) Die Matrix $E(AC)$ hat die Grösse 5×2.

(g) Die Matrix $E^T A$ ist nicht definiert, denn die Spaltenzahl von E^T stimmt nicht mit der Zeilenzahl von A überein.

(h) Die Matrix $(A^T + E)D$ hat die Grösse 5×2.

Aufgabe 3.2

Da die entsprechenden Elemente der beiden Matrizen übereinstimmen müssen, ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a - b &= 8 \\ b + c &= 1 \\ 3d + c &= 7 \\ 2a - 4d &= 6 \end{aligned}$$

mit der Lösung $a = 5$, $b = -3$, $c = 4$ und $d = 1$.

Aufgabe 3.3

(a) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $A - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.4

(a) $5A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 5 \\ 0 & -10 \\ 30 & 40 \end{pmatrix}$

(b) $-7A = -7 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & -7 \\ 0 & 14 \\ -42 & -56 \end{pmatrix}$

(c) $\frac{1}{2}A = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.5

(a) nicht definiert

(b) $\begin{pmatrix} 4 & -16 \\ 22 & 13 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.6

(a) $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

(e) nicht definiert

(f) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

(g) nicht definiert

(h) $\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.7

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 16 & 0 & 20 \\ 9 & 2 & 11 \end{pmatrix}$

(d) nicht definiert

(e) $\begin{pmatrix} 8 \\ 26 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 19 & 6 & 23 \\ 11 & -2 & 14 \end{pmatrix}$

(g) nicht definiert

(h) $\begin{pmatrix} 48 & 0 & 60 \\ -23 & 2 & -29 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 48 & 0 & 60 \\ -23 & 2 & -29 \end{pmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} 312 \\ -148 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.8

(a) $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 25 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 17 & 14 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) Produkt nicht definiert

(e) $\begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 9 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.9

(a) -2

(b) -4

(d) -1

(c) -1

(e) -4

(f) -2

(g) 26

Aufgabe 4.1

(a)

	S	B	R
S	0.8	0.2	0.3
B	0.1	0.5	0.1
R	0.1	0.3	0.6

(b) $A^3 = \begin{pmatrix} 0.631 & 0.445 & 0.506 \\ 0.156 & 0.220 & 0.156 \\ 0.213 & 0.335 & 0.338 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 0.506$

(c) $\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix} 17/30 & 17/30 & 17/30 \\ 5/30 & 5/30 & 5/30 \\ 8/30 & 8/30 & 8/30 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad$ 5 Tage

Aufgabe 4.2

(a)

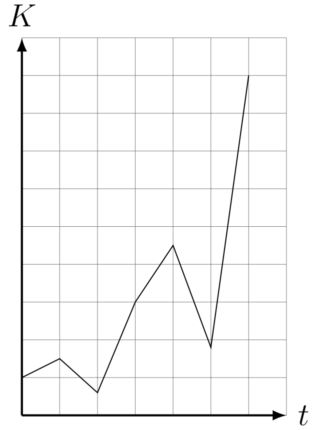
	E	L	K
E	0	0	50
L	0.2	0	0
K	0	0.3	0

Aufgabe 4.3

(b)

t	$A^t(1000, 500, 100)^T$
0	(1000, 500, 100)
1	(5000, 200, 150)
2	(7500, 1000, 60)
3	(3000, 1500, 300)
4	(15000, 600, 450)
5	(22500, 3000, 180)
6	(9000, 4500, 900)

Aufgabe 4.4



(c) Ohne Ressourcenknappheit wächst die Population exponentiell an.

Aufgabe 4.5

	von grün	von blau
zu grün	0.65	0.95
zu blau	0.35	0.05
Summe	1.00	1.00

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0.65 & 0.95 \\ 0.35 & 0.05 \end{pmatrix}$$

Anfangspopulation:

grün:	190 000
blau:	60 000

$$\Rightarrow b_0 = \begin{pmatrix} 190\,000 \\ 60\,000 \end{pmatrix}$$

(a) $b_1 = Ab_0 = \begin{pmatrix} 180\,500 \\ 69\,500 \end{pmatrix}$

(b) $b_5 = A^5 b_0 = \begin{pmatrix} 182\,675 \\ 67\,325 \end{pmatrix}$

(c) $b_{50} = A^{50} b_0 = \begin{pmatrix} 182\,692 \\ 67\,308 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5.1

(a) $A^{-1} = \frac{1}{6-5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $A^{-1} = \frac{1}{8+12}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/20 \\ -1/5 & 1/10 \end{pmatrix}$

(c) $A^{-1} = \frac{1}{0}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$ ist nicht definiert

(d) $A^{-1} = \frac{1}{6-0}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5.2

Im Allgemeinen nein, denn $(AB)^2 = (AB)(AB) = ABAB$.
Gilt jedoch ausnahmsweise $AB = BA$, so erhält man:

$$(AB)^2 = (AB)(AB) = ABAB = AABB = (AA)(BB) = A^2B^2$$

Aufgabe 5.3

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5/13 & 1/13 \\ -3/13 & 2/13 \end{pmatrix}$

(b) $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1 \\ 1/7 & 3/7 \end{pmatrix}$

(c) $A = (5A^T)^{-1} = \left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\right]^T = \begin{pmatrix} -2/5 & 1 \\ -1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$

(d) $A = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -9/13 & 1/13 \\ 2/13 & -6/13 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5.4

(a) $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 28 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A^{-3} = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 \\ -7/2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A^2 - 2A + I = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5.5

$$M^{-1} = \frac{1}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.6

$$\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$$

Berechnet man das Produkt der Matrizen links, und vergleicht mit den entsprechenden Elementen rechts, so ergibt sich:

$$\begin{array}{cccc} a_{11}b_{11} = 1 & a_{11}b_{12} = 0 & \dots & a_{11}b_{1n} = 0 \\ a_{22}b_{21} = 0 & a_{22}b_{22} = 1 & \dots & a_{22}b_{2n} = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nn}b_{n1} = 0 & a_{nn}b_{n2} = 0 & \dots & a_{nn}b_{2n} = 1 \end{array}$$

Da nach Voraussetzung alle Elemente a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} nicht null sind, müssen die Elemente b_{ij} mit $j \neq i$ den Wert Null haben.

Für die Diagonalelemente gilt: $b_{ii} = 1/a_{ii}$ $(i = 1, \dots, n)$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}1/a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/a_{nn}\end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.7

$$\begin{aligned} A^2 - 3A + I = 0 \quad \Rightarrow \quad I &= 3A - A^2 \\ I &= A\underbrace{(3I - A)}_{A^{-1}} \\ I &= AA^{-1} \\ I &= I \end{aligned}$$

Aufgabe 5.8

Das Beweisprinzip soll an einer 3×3-Matrix gezeigt werden.

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ mit einer Nullzeile (z. B. am Ende)}$$

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ eine potenzielle Inverse von A.

Das Produkt AB muss folgende Gleichung erfüllen:

$$AB = \cdots = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} & c_{22} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist wegen des Elements 1 unten rechts nicht möglich.

Aufgabe 5.9

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.10

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 4 & 0 & -8 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5.11

(a) $B + B^T$ ist symmetrisch, wenn $(B + B^T)^T = B + B^T$ gilt.

Beweis:

$$\left(B + B^T\right)^T = B^T + \left(B^T\right)^T = B^T + B = B + B^T \qquad \square$$

(b) BB^T ist symmetrisch, wenn $(BB^T)^T = BB^T$ gilt.

Beweis:

$$\left(BB^T\right)^T = \left(B^T\right)^T B^T = BB^T \qquad \square$$

(c) $B - B^T$ ist schiefsymmetrisch, wenn $(B - B^T)^T = -(B + B^T)$ gilt.

Beweis:

$$\left(B - B^T\right)^T = B^T - \left(B^T\right)^T = B^T - B = -(B + B^T) \qquad \square$$

Aufgabe 5.12

- Verankerung ($n = 1$): $\left(A^1\right)^T = A^T = \left(A^T\right)^1$

- Induktionshypothese: Die Aussage sei wahr für ein $n \geq 1$.

  Induktionsschritt ($n \to n+1$):

$$\begin{aligned}\left(A^{n+1}\right)^T &= \left(A^n A\right)^T = A^T \left(A^n\right)^T \\ &\overset{IV}{=} A^T \left(A^T\right)^n = \left(A^T\right)^1 \left(A^T\right)^n = \left(A^T\right)^{n+1}\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 5.13

(a) $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A ist nilpotent mit Index $k = 3$.

(b) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^4 = \ldots$

A ist weder nilpotent noch periodisch

(c) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A$

A ist periodisch mit $p = 2$.