Aufgabe 6.1

(a) Elementarmatrix; das 2-fache der 3. Zeile wird zur 2. Zeile addiert.

(b) keine Elementarmatrix; eine Elementarmatrix darf nur aus *einer* Zeilenvertauschung bestehen.

(c) Elementarmatrix; die zweite Zeile mit 4 multiplizieren.

Aufgabe 6.2

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

- Addiere das 3-fache der 1. Zeile zur 2. Zeile
- Addiere die 2-fache der 1. Zeile zur 3. Zeile

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

- Addiere das (-1)-fache der 2. Zeile zur 3. Zeile

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

- Addiere das 2-fache der 3. Zeile zur 2. Zeile
- Addiere die 3. Zeile zur 1. Zeile

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

- Addiere die 2. Zeile zur 1. Zeile.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.3

$$\left.\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

- Addiere die 1. Zeile zur 2. Zeile:
- Addiere das (-2)-fache der 1. Zeile zur 4. Zeile:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

- Addiere das (-4)-fache der 2. Zeile zur 3. Zeile:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 24 & -4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

- Vertausche die 3. und 4. Zeile:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 24 & -4 & -4 & 1 & 0 \end{array}$$

Addiere das (-4)-fache von Zeile 3 zur Zeile 4:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 1 & -4 \end{array}$$

die 4. Zeile in der linken Matrix ist die Nullzeile. Also ist A nicht invertierbar.

Aufgabe 7.1

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.2

- Koordinatensystem verschieben: $(y = 3 \to y = 0)$

  $$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Spiegelung an der x-Achse:

  $$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Verschiebung des Koordinatensystems rückgängig machen.

  $$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Insgesamt: $T^{-1}ST = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Reihenfolge!)

Aufgabe 7.3

- Koordinatensystem verschieben, damit $Z(-2, 5) \to O(0, 0)$:

  $$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Streckung am Ursprung:

  $$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Verschiebung des Koordinatensystems rückgängig machen.

  $$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Insgesamt: $T^{-1}ST = \cdots = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Reihenfolge!)

Aufgabe 8.1

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Die erste und dritte Zeile sind identisch.

(b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$

Es sind zwei Zeilenvertauschungen nötig, um A auf Diagonalform (Dreiecksform) zu bringen.

(c) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 0$

Die erste und dritte Zeile sind linear abhängig.

Aufgabe 8.2

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & 7 \\ 0 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 9 & 7 \\ 0 & 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 12 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 21 \end{vmatrix}$$

Da die Matrix nun Dreiecksform hat, gilt:

$\det A = 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 21 = 84$

Aufgabe 8.3

$\det A = a^2 - b^2$

Aufgabe 8.4

(a) $\det A^T = \det A = -2$

(b) $\det 3A = 3^4 \cdot \det A = 81 \cdot (-2) = -162$

(c) $\det A^{-1} = 1/\det A = -0.5$

(d) $\det AB = \det A \cdot \det B = (-2) \cdot 3 = -6$

Aufgabe 8.5

Die Regel von Sarrus anwenden:

$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \\ a & a & b & 1 & a & \\ b & 0 & a & b & 0 & \\ a & b & 1 & a & b & \end{array}$$

$\det A = 0 + ab + ab - 0 - a^3 - b^3 = 2ab - a^3 - b^3$

Aufgabe 8.6

$$\begin{vmatrix} a & 1 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ b & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b & 0 & a \\ a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ b & 0 & a \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a \left(b \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 0 & a \\ b & 1 \end{vmatrix} \right) + b \left(1 \begin{vmatrix} 0 & a \\ b & 1 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} b & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= a\,(b \cdot 1 - a \cdot (-ab)) + b\,(1 \cdot (-ab) - b \cdot b)$$

$$= a^3 b - ab^2 - ab + b^3$$

Aufgabe 8.7

Regel von Sarrus:

$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \\ t & 1 & 2 & t & 1 & \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & \\ 2 & t & 1 & 2 & t & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \det A &= 0 \\ t + 2 + 4t - 4 - t^2 - 2 &= 0 \\ -t^2 + 5t - 4 &= 0 \\ t^2 - 5t + 4 &= 0 \\ (t-4)(t-1) &= 0 \\ t_1 &= 1 \\ t_2 &= 4 \end{aligned}$$

A ist regulär für $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$