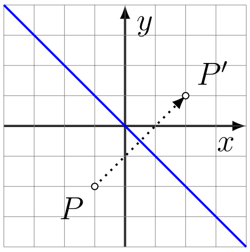
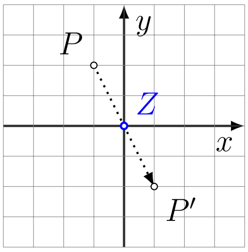
Aufgabe 7.1



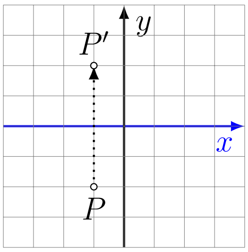
$$\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.2



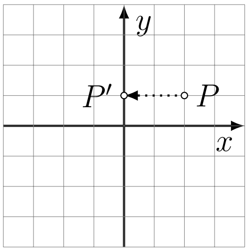
$$\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.3



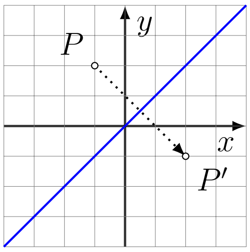
$$\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.4



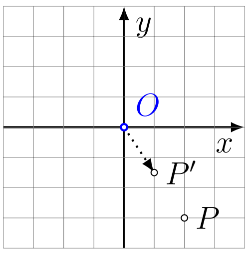
$$\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.5



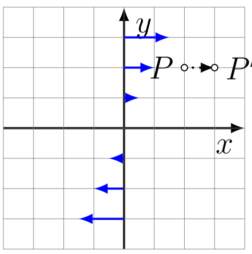
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.6



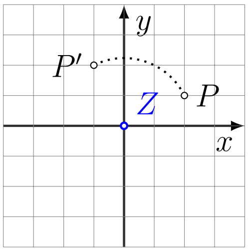
$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5x \\ 0.5y \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.7



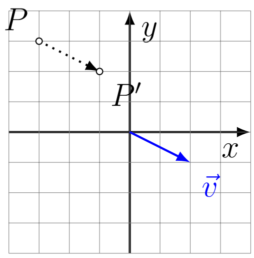
$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 0.5y \\ y \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.8



$$\begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.9



Die Translation ist keine lineare Abbildung. Mit Hilfe homogener Koordinaten $[P(x, y) \Rightarrow P(x : y : 1)]$ lässt sich dieser Defekt jedoch beheben.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.10

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (Scherung parallel zur y-Achse)

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (Spiegelung an der x-Achse)

$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (zentrische Streckung am Ursprung)

(a) Gesamtabbildung: $A = A_3 A_2 A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ [Reihenfolge!]

(b) Umkehrabbildung: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ -1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.11

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Translation } Z \to O\text{)}$$

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(zentrische Streckung an } O\text{)}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Rücktranslation } O \to Z\text{)}$$

$$T^{-1}ST = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.12

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Translation } Z \to O\text{)}$$

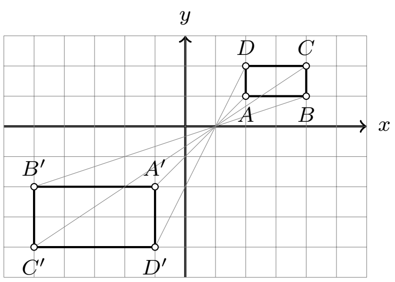
$$R = \begin{pmatrix} \cos 270^\circ & -\sin 270^\circ & 0 \\ \sin 270^\circ & \cos 270^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Drehung)}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Rücktranslation } O \to Z\text{)}$$

$$T^{-1}RT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.13

$A'(-1,-2)$, $B'(-5,-2)$, $C'(-5,-4)$, $D'(-1,-4)$



Eine zentrische Streckung mit Zentrum $Z(1,0)$ und dem Streckungsfaktor $k = -2$.

Aufgabe 7.14

$$R = \begin{pmatrix} \cos(-45°) & -\sin(-45°) \\ \sin(-45°) & \cos(-45°) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(45°) & \sin(45°) \\ -\sin(45°) & \cos(45°) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(Spiegelung an der } x\text{-Achse)}$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(45°) & -\sin(45°) \\ \sin(45°) & \cos(45°) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^{-1}SR = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(ok)}$$