

**Aufgabe 4.1**

Körnermasse am Tag  $k$ :  $A_k, B_k, C_k$

$$A_{k+1} = 0.2A_k + 0.1B_k + 0.2C_k$$

$$B_{k+1} = 0.5A_k + 0.5B_k + 0.2C_k$$

$$C_{k+1} = 0.3A_k + 0.4B_k + 0.6C_k$$

Übergangsmatrix:  $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \rightarrow [A]$

Anfangsbestand  $\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix} \rightarrow [B]$

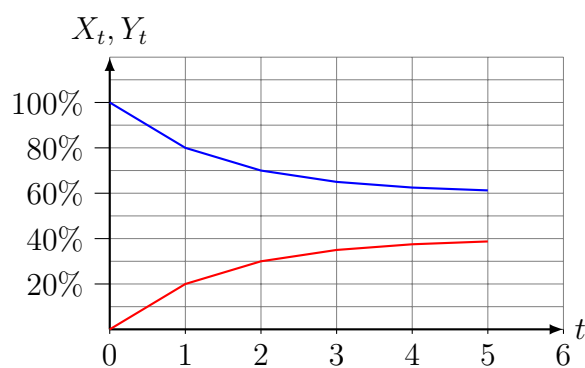
TR:  $[A]^{50} * [B] = \begin{pmatrix} 98.6 \\ 213.7 \\ 287.7 \end{pmatrix}$  [in Gramm]

**Aufgabe 4.2**

(a)  $\begin{aligned} X_{t+1} &= 0.8X_t + 0.3Y_t \\ Y_{t+1} &= 0.2X_t + 0.7Y_t \end{aligned} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$

(b) Konzentrationskurven:

Mit  $C_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  gilt  $C_k = A^k C_0$



(c) Gleichgewicht:  $C_\infty \approx A^{50} C_0 = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$

### Aufgabe 4.3

(a) Übergangsmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) langfristige Entwicklung:

nach 10 Zyklen:

$$A^{10} \approx \begin{pmatrix} 1.64 \cdot 10^{-1} & 1.54 \cdot 10^0 & 1.66 \cdot 10^0 \\ 1.66 \cdot 10^{-2} & 1.64 \cdot 10^{-1} & 2.18 \cdot 10^{-1} \\ 8.70 \cdot 10^{-3} & 6.66 \cdot 10^{-2} & 7.68 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}$$

nach 100 Zyklen:

$$A^{100} \approx \begin{pmatrix} 5.5 \cdot 10^{-5} & 5.0 \cdot 10^{-4} & 6.0 \cdot 10^{-4} \\ 6.0 \cdot 10^{-6} & 5.5 \cdot 10^{-5} & 6.5 \cdot 10^{-5} \\ 2.6 \cdot 10^{-6} & 2.4 \cdot 10^{-5} & 2.9 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$$

Die Population wird langfristig aussterben.

(c) Stabilitätsbedingung:  $A\vec{x} = \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 0 & f_1 & 10 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$f_1 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 = x_0 \quad (1)$$

$$0.1 \cdot x_0 = x_1 \quad (2)$$

$$0.4 \cdot x_1 = x_2 \quad (3)$$

$$(2) \quad x_1 = 0.1 \cdot x_0$$

$$(3) \quad x_2 = 0.4 \cdot x_1 = 0.04 \cdot x_0$$

in (1) einsetzen:

$$f_1 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 = x_0$$

$$f_1 \cdot 0.1 \cdot x_0 + 0.4 \cdot x_0 = x_0$$

$$0.1 \cdot f_1 \cdot x_0 = 0.6 \cdot x_0 \quad || : 0.1x_0$$

$$f_1 = 6$$