Aufgabe 3.1

(a) $\dim(A) = 3 \times 5$

(b) $a_{2,3} = 0$

(c) $a_{3,2} = 2$

(d) $a_{4,1}$ ist nicht definiert

Aufgabe 3.2

(a) $\dim(A \cdot B) = 3 \times 3$

(b) $\dim(B \cdot A) = 4 \times 4$

(c) $\dim(A \cdot A^T \cdot C) = 3 \times 2$

(d) $\dim(B \cdot C) = \times 4 \times 2$

(e) $\dim(C \cdot D)$ nicht definiert

(f) $\dim((D^T \cdot D)^{10}) = 4 \times 4$

Aufgabe 3.3

$AX = B$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \\ 1 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.4

Aufgabe 3.5

(a) $2A + B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 1 & 9 & 6 \end{pmatrix}$

(b) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

(c) $BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

(d) $A^T B^T = (BA)^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

(e) $\text{tr}(C) = c_{11} + c_{22} = 1 + 2 = 3$

(f) Die Spur ist nicht definiert, da BC nicht quadratisch ist.

Aufgabe 3.6

Damit die Aufgabe sinnvoll lösbar ist, sollte die Matrix periodisch oder nilpotent sein. Durch Probieren erhält man:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Also gilt: $A = A^1 = A^3 = A^5 = \dots$ und damit:

$$A^{100} = A^{99} \cdot A = A \cdot A = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$