Komplexe Zahlen

Übungen (L+)

Version vom 18. Februar 2018

Aufgabe 1.1 (a)

$x + 3 = 8$ nicht lösbar in: —

Aufgabe 1.1 (b)

$x + 7 = 7$ nicht lösbar in: $\mathbb{N}$

Aufgabe 1.1 (c)

$3x = 12$ nicht lösbar in: —

Aufgabe 1.1 (d)

$4x = 11$ nicht lösbar in: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$

Aufgabe 1.1 (e)

$8x + 36 = 0$ nicht lösbar in: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$

Aufgabe 1.1 (f)

$7x + 12 = 0$ nicht lösbar in: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$

Aufgabe 1.1 (g)

$x^2 = 4.41$ nicht lösbar in: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$

Aufgabe 1.1 (h)

$x^2 = 5$ nicht lösbar in: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

Aufgabe 1.1 (i)

$x^2 + 9 = 0$ nicht lösbar in: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Aufgabe 1.1 (j)

$(x - 1)(x + 2)(2x - 1)(x^2 - 3) = 0$ nicht lösbar in: —

Aufgabe 1.2

Löse in der Grundmenge $\mathbb{C}$.

Aufgabe 1.2 (a)

$x^2 = -25$

$$\begin{aligned} x^2 &= 25\,\mathrm{i}^2 \\ x_1 &= 5\,\mathrm{i} \\ x_2 &= -5\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

Aufgabe 1.2 (b)

$2x^2 + 32 = 0$

$$\begin{aligned} x^2 &= -16 \\ x^2 &= 16\,\mathrm{i}^2 \\ x_1 &= 4\,\mathrm{i} \\ x_2 &= -4\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

Aufgabe 1.2 (c)

$x^2 = -5$

$$\begin{aligned} x^2 &= 5\,\mathrm{i}^2 \\ x_1 &= \sqrt{5}\,\mathrm{i} \\ x_2 &= -\sqrt{5}\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

Aufgabe 1.2 (d)

$16x^2 + 49 = 0$

$$\begin{aligned} 16x^2 &= -49 \\ x^2 &= -\frac{49}{16} \\ x_1 &= \frac{7}{4}\,\mathrm{i} \\ x_2 &= -\frac{7}{4}\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

Aufgabe 1.3

(a) 2 ist eine natürliche Zahl. *wahr*

(b) 2 ist eine komplexe Zahl. *wahr*

(c) $\sqrt{3}$ ist eine rationale Zahl. *falsch* (irrationale Zahl)

(d) $3 + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ ist eine reelle Zahl. *falsch* (komplexe Zahl)

(e) $-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ ist eine imaginäre Zahl. *wahr*

(f) π ist eine irrationale Zahl. *wahr*

Aufgabe 1.4

(a) $(8+2\,\mathrm{i})+(7+3\,\mathrm{i}) = 15+5\,\mathrm{i}$

(b) $(11-15\,\mathrm{i})+(-3+8\,\mathrm{i}) = 8-7\,\mathrm{i}$

(c) $(1+10\,\mathrm{i})-(5-13\,\mathrm{i}) = -4+23\,\mathrm{i}$

(d) $25\,\mathrm{i}-(-8+\mathrm{i}) = 8+24\,\mathrm{i}$

Aufgabe 1.5

(a) $8\cdot 5\,\mathrm{i} = 40\,\mathrm{i}$

(b) $8\,\mathrm{i}\cdot 5\,\mathrm{i} = 40\,\mathrm{i}^2 = -40$

(c) $5(6-9\,\mathrm{i}) = 30-45\,\mathrm{i}$

(d) $(-7-12\,\mathrm{i})5\,\mathrm{i} = -35\,\mathrm{i}-60\,\mathrm{i}^2 = 60-35\,\mathrm{i}$

(e) $-\mathrm{i}(14+5\,\mathrm{i}) = -14\,\mathrm{i}-5\,\mathrm{i}^2 = 5-14\,\mathrm{i}$

(f) $(8+2\,\mathrm{i})(7+3\,\mathrm{i}) = 56+24\,\mathrm{i}+14\,\mathrm{i}+6\,\mathrm{i}^2 = 50+38\,\mathrm{i}$

Aufgabe 1.6

(a) $-z = -3-5\,\mathrm{i}$

(b) $-z = \mathrm{i}$

(c) $-z = -15$

(d) $-z = 8-11\,\mathrm{i}$

Aufgabe 1.7

(a) $\overline{z} = \overline{-3+8\,\mathrm{i}} = -3-8\,\mathrm{i}$

(b) $\overline{z} = \overline{2-3\,\mathrm{i}} = 2+3\,\mathrm{i}$

(c) $\overline{z} = \overline{3} = 3$

(d) $\overline{z} = \overline{2\,\mathrm{i}} = -2\,\mathrm{i}$

Aufgabe 1.8

(a) $(-\mathrm{i})^2 = \mathrm{i}^2 = -1$

(b) $\mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 = -1 - \mathrm{i}$

(c) $\mathrm{i}^4 + \mathrm{i}^6 = 1 + (-1) = 0$

(d) $(-2\mathrm{i})^3 + 5\mathrm{i} = (-2)^3 \cdot i^3 + 5\mathrm{i} = -8 \cdot (-\mathrm{i}) + 5\mathrm{i} = 8\mathrm{i} + 5\mathrm{i} = 13\mathrm{i}$

Aufgabe 1.9

(a) Für $z = a + b\,\mathrm{i}$ gilt:

$$(z + \overline{z}) = (a + b\,\mathrm{i}) + (a - b\,\mathrm{i}) = 2a \in \mathbb{R}$$

(b) Für $z = a + b\,\mathrm{i}$ gilt:

$$\begin{aligned}(z \cdot \overline{z}) &= (a + b\,\mathrm{i})(a - b\,\mathrm{i}) = a^2 - ab\,\mathrm{i} + ab\,\mathrm{i} - b\,\mathrm{i}^2 \\ &= a^2 + b^2 \in\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Aufgabe 1.10

(a) $12\,\mathrm{i} : 3 = 4\,\mathrm{i}$

(b) $15 : 5\,\mathrm{i} = \dfrac{15}{5\,\mathrm{i}} = \dfrac{3}{\mathrm{i}} = \dfrac{3\mathrm{i}}{\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}} = \dfrac{3\mathrm{i}}{-1} = -3\,\mathrm{i}$

(c) $(4 + 6\,\mathrm{i}) : 2 = 2 + 3\,\mathrm{i}$

(d) $(4 + 6\,\mathrm{i}) : 2\,\mathrm{i} = \dfrac{2}{\mathrm{i}} + 3 = 3 - 2\,\mathrm{i}$

Aufgabe 1.11

(a) $z^{-1} = \dfrac{1}{2 + \mathrm{i}} = \dfrac{2 - \mathrm{i}}{(2 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})} = \dfrac{2 - \mathrm{i}}{4 + 1} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}\mathrm{i}$

(b) $z^{-1} = \dfrac{1}{4 + 3\,\mathrm{i}} = \dfrac{4 + 3\,\mathrm{i}}{(4 + 3\,\mathrm{i})(4 - 3\,\mathrm{i})} = \dfrac{4 + 3\,\mathrm{i}}{25} = \dfrac{4}{25} + \dfrac{3}{25}\,\mathrm{i}$

(c)
$$\begin{aligned}z^{-1} &= \frac{1}{-24 - 7\,\mathrm{i}} = \frac{-24 - 7\,\mathrm{i}}{(-24 - 7\,\mathrm{i})(-24 + 7\,\mathrm{i})} \\ &= \frac{-24 + 7\,\mathrm{i}}{625} = \frac{-24}{625} + \frac{7}{625}\,\mathrm{i}\end{aligned}$$

Aufgabe 1.12

(a) $\dfrac{5+3\,\mathrm{i}}{2+4\,\mathrm{i}} = \dfrac{(5+3\,\mathrm{i})(2-4\mathrm{i})}{(2+4\mathrm{i})(2-4\mathrm{i})} = \dfrac{22-14\,\mathrm{i}}{20} = 1.1-0.7\,\mathrm{i}$

(b) $\dfrac{63+16\,\mathrm{i}}{4+3\,\mathrm{i}} = \dfrac{(63+16\,\mathrm{i})(4-3\,\mathrm{i})}{(4+3\,\mathrm{i})(4-3\,\mathrm{i})} = \dfrac{300-125\,\mathrm{i}}{25} = 12-5\,\mathrm{i}$

(c) $\dfrac{56+33\,\mathrm{i}}{12-5\,\mathrm{i}} = \dfrac{(56+33\,\mathrm{i})(12+5\,\mathrm{i})}{(12-5\,\mathrm{i})(12+5\,\mathrm{i})} = \dfrac{507-676\,\mathrm{i}}{169} = 3+4\,\mathrm{i}$

(d) $\dfrac{13-5\,\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(13-5\,\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \dfrac{18+8\,\mathrm{i}}{2} = 9+4\,\mathrm{i}$

Aufgabe 1.13

(a) $$\frac{7}{\sqrt{2}-\sqrt{5}\,\mathrm{i}} = \frac{7(\sqrt{2}+\sqrt{5}\,\mathrm{i})}{(\sqrt{2}-\sqrt{5}\,\mathrm{i})(\sqrt{2}+\sqrt{5}\,\mathrm{i})} = \frac{7(\sqrt{2}+\sqrt{5}\,\mathrm{i})}{2+5}$$
$$= \sqrt{2}+\sqrt{5}\,\mathrm{i}$$

(b) $$\frac{4\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}\,\mathrm{i}} = \frac{4\mathrm{i}(\sqrt{3}-\sqrt{5}\,\mathrm{i})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5}\,\mathrm{i})(\sqrt{3}-\sqrt{5}\,\mathrm{i})}$$
$$= \frac{4\sqrt{5}+4\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{8} = \frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$$

(c) $$\frac{4+\sqrt{2}\,\mathrm{i}}{\sqrt{2}-4\,\mathrm{i}} = \frac{(4+\sqrt{2}\,\mathrm{i})(\sqrt{2}+4\,\mathrm{i})}{(\sqrt{2}-4\,\mathrm{i})(\sqrt{2}+4\,\mathrm{i})}$$
$$= \frac{(18\,\mathrm{i})(\sqrt{2}+4\,\mathrm{i})}{18} = \mathrm{i}$$

Aufgabe 1.14

(a) $\mathrm{i}^1 = \mathrm{i},\ \mathrm{i}^2 = -1,\ \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i},\ \mathrm{i}^4 = 1,\ \mathrm{i}^5 = \mathrm{i},\ \mathrm{i}^6 = -1,\ \mathrm{i}^7 = -\mathrm{i},\ \mathrm{i}^8 = 1$

(b) $\mathrm{i}^{-1} = \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i},\ \mathrm{i}^{-2} = \mathrm{i}^2 = -1,\ \mathrm{i}^{-3} = \mathrm{i}^1 = \mathrm{i},\ \mathrm{i}^{-4} = \mathrm{i}^0 = 1,$

(c) $\mathrm{i}^{17} = \mathrm{i}^{16}\cdot\mathrm{i} = \mathrm{i},\ \mathrm{i}^{50} = \mathrm{i}^{48}\cdot\mathrm{i}^2 = -1,\ \mathrm{i}^{91} = \mathrm{i}^{88}\cdot\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i},\ \mathrm{i}^{236} = 1$

(d) $\mathrm{i}^{-27} = \mathrm{i}^{-28}\cdot\mathrm{i} = \mathrm{i},\ \mathrm{i}^{-61} = \mathrm{i}^{-64}\cdot\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i},\ \mathrm{i}^{-100} = 1,\ \mathrm{i}^{-50} = \mathrm{i}^{-52}\cdot\mathrm{i}^2 = -1$

Aufgabe 1.15

(a) $\operatorname{Re}\dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{5}{34}$

(b) $\dfrac{\operatorname{Re} z_1}{\operatorname{Re} z_2} = -\dfrac{5}{3}$

(c) $\operatorname{Im}\dfrac{z_2}{z_1 - z_2} = \dfrac{31}{73}$

Aufgabe 1.16

(a) $(a - 2b\,\mathrm{i}) - (3a + 4c\,\mathrm{i}) = -2a + (-2b - 4c)\,\mathrm{i}$

(b) $(7a + 3b\,\mathrm{i})(4c - d\,\mathrm{i}) = (28ac + 3bd) + (12bc - 7ad)\,\mathrm{i}$

(c)
$$\frac{a + b\,\mathrm{i}}{c - d\,\mathrm{i}} = \frac{(a + b\,\mathrm{i})(c + d\,\mathrm{i})}{(c - d\,\mathrm{i})(c + d\,\mathrm{i})} = \frac{ac - bd + (ad + bc)\,\mathrm{i}}{c^2 + d^2}$$
$$= \frac{ac - bd}{c^2 + d^2} + \frac{ad + bc}{c^2 + d^2}\,\mathrm{i}$$

(d)
$$\mathrm{i}(a + b\,\mathrm{i}) + \frac{1}{\mathrm{i}}(a - b\,\mathrm{i}) = a\,\mathrm{i} - b - \mathrm{i}(a - b\,\mathrm{i})$$
$$= a\,\mathrm{i} - b - a\,\mathrm{i} - b = -2b$$

Aufgabe 1.17

(a)
$$a\,\mathrm{i}(2b + 3c\,\mathrm{i}) - \frac{a}{\mathrm{i}}(2b - 3c\,\mathrm{i}) = a\,\mathrm{i}(2b + 3c\,\mathrm{i}) + a\,\mathrm{i}(2b - 3c\,\mathrm{i})$$
$$= 4ab\,\mathrm{i}$$

(b)
$$\overline{(b - c\,\mathrm{i})}(b - c\,\mathrm{i})^{-1} = \frac{b + c\,\mathrm{i}}{b - c\,\mathrm{i}} = \frac{(b + c\,\mathrm{i})(b + c\,\mathrm{i})}{(b - c\,\mathrm{i})(b + c\,\mathrm{i})}$$
$$= \frac{b^2 - c^2 + 2bc\,\mathrm{i}}{b^2 + c^2} = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} + \frac{2bc}{b^2 + c^2}\,\mathrm{i}$$

(c)
$$\frac{a + b\,\mathrm{i}}{3c + d\,\mathrm{i}} - \frac{a - b\,\mathrm{i}}{3c - d\,\mathrm{i}}$$
$$= \frac{(a + b\,\mathrm{i})(3c - d\,\mathrm{i})}{9c^2 + d^2} - \frac{(a - b\,\mathrm{i})(3c + d\,\mathrm{i})}{9c^2 + d^2}$$
$$= \frac{(3ac + bd + 3bc\mathrm{i} - ad\mathrm{i}) - (3ac + bd - 3bc\mathrm{i} + ad\mathrm{i})}{9c^2 + d^2}$$
$$= \frac{6bc - 2ad}{9c^2 + d^2}\,\mathrm{i}$$

(d)
$$a\,\mathrm{i} + \overline{\frac{1}{a}\,\mathrm{i}} + \frac{a}{\mathrm{i}} + \frac{\mathrm{i}}{a} = a\,\mathrm{i} - \frac{1}{a}\,\mathrm{i} - a\,\mathrm{i} + \frac{1}{a}\,\mathrm{i} = 0$$

Aufgabe 1.18

(a) $\mathrm{i}^{11} + \mathrm{i}^{12} + \mathrm{i}^{13} + \mathrm{i}^{14} = -\mathrm{i} + 1 + \mathrm{i} - 1 = 0$

(a) $$\sum_{k=1}^{50} \mathrm{i}^k = \underbrace{\mathrm{i} - 1 - \mathrm{i} + 1}_{0} + \cdots + \underbrace{\mathrm{i} - 1 - \mathrm{i} + 1}_{0} + \mathrm{i} - 1$$
$$= -1 + \mathrm{i}$$

(c) $$\prod_{k=1}^{25} \mathrm{i}^k = \mathrm{i}^1 \cdot \mathrm{i}^2 \cdot \mathrm{i}^3 \cdot \ldots \cdot \mathrm{i}^{25} = \mathrm{i}^{1+2+3+\ldots+25}$$
$$= \mathrm{i}^{25/2\cdot(1+25)} = \mathrm{i}^{25\cdot 13} = \left(\mathrm{i}^{25}\right)^{13} = \mathrm{i}^{13} = \mathrm{i}$$

Aufgabe 1.19

(a) $$\sum_{k=1}^{21} \mathrm{i}^{2k+1} = \underbrace{\mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^5}_{0} + \cdots + \underbrace{\mathrm{i}^{39} + \mathrm{i}^{41}}_{0} + \mathrm{i}^{43} = \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$$

(b) $$\sum_{k=1}^{50} \frac{1}{\mathrm{i}^k} = \mathrm{i}^{-1} + \mathrm{i}^{-2} + \mathrm{i}^{-3} + \mathrm{i}^{-4} + \ldots + \mathrm{i}^{-48} + \mathrm{i}^{-49} + \mathrm{i}^{-50}$$
$$= \underbrace{-\mathrm{i} - 1 + \mathrm{i} + 1 + \ldots + 1}_{0} - \mathrm{i} - 1 = -1 - \mathrm{i}$$

(c) $$\sum_{k=1}^{21} (-\mathrm{i})^{-3k} = \sum_{k=1}^{21} \left((-\mathrm{i})^{-3}\right)^k = \sum_{k=1}^{21} (-\mathrm{i})^k$$
$$= \underbrace{(-\mathrm{i}) + (-\mathrm{i})^2 + \ldots + (-\mathrm{i})^{20}}_{0} + (-\mathrm{i})^{21}$$
$$= (-\mathrm{i})^1 = -\mathrm{i}$$

Aufgabe 1.20

(a) $$\begin{aligned} z &= \overline{z} \\ a + b\,\mathrm{i} &= \overline{a + b\,\mathrm{i}} \\ a + b\,\mathrm{i} &= a - b\,\mathrm{i} \\ 2b\mathrm{i} &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

Die Aussage gilt für alle $z \in \mathbb{R}$.

(b)
$$\begin{aligned}
z &= -z \\
a + b\,\mathrm{i} &= -a - b\mathrm{i} \\
2a + 2b\,\mathrm{i} &= 0 + 0\,\mathrm{i} \\
a &= 0 \\
b &= 0
\end{aligned}$$

Die Aussage gilt für $z = 0 + 0\,\mathrm{i} = 0$.

(c)
$$\begin{aligned}
z &= z^{-1} \\
a + b\,\mathrm{i} &= \frac{1}{a + b\mathrm{i}} \\
(a + b\,\mathrm{i})(a + b\,\mathrm{i}) &= 1 \\
(a^2 - b^2) + 2ab\mathrm{i} &= 1 + 0\,\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich: $a = 0$ oder $b = 0$ aber nicht $a = b = 0$.

Falls $b = 0$: $a^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 1$

Falls $a = 0$: $-b^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad$ keine Lösung

Die Aussage gilt für $z = 1$ oder $z = -1$

(d)
$$\begin{aligned}
-\overline{z} &= \overline{-z} \\
-\overline{a + b\,\mathrm{i}} &= \overline{-(a + b\mathrm{i})} \\
-(a - b\,\mathrm{i}) &= \overline{-a - b\mathrm{i}} \\
-a + b\,\mathrm{i} &= -a + b\mathrm{i} \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Die Aussage gilt für alle $z \in \mathbb{C}$.

(e)
$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(z) &= \mathrm{Re}(\overline{z}) \\
\mathrm{Re}(a + b\,\mathrm{i}) &= \mathrm{Re}(\overline{a + b\,\mathrm{i}}) \\
a &= \mathrm{Re}(a - b\,\mathrm{i}) \\
a &= a \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Die Aussage gilt für alle $z \in \mathbb{C}$.

(f)
$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(-z) &= 0 \\
\mathrm{Im}(a + b\,\mathrm{i}) + \mathrm{Im}(-(a + b\,\mathrm{i})) &= 0 \\
b + \mathrm{Im}(-a - b\,\mathrm{i}) &= 0 \\
b + (-b) &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Die Aussage gilt für alle $z \in \mathbb{C}$.

(g)
$$\begin{aligned}
-z^{-1} &= (-z)^{-1}\\
-\frac{1}{a+b\,\mathrm{i}} &= \frac{1}{-(a+b\,\mathrm{i})}\\
-(-a-b\,\mathrm{i}) &= a+b\,\mathrm{i}\\
a+b &= a+b\,\mathrm{i}\\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Die Aussage gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(h)
$$\begin{aligned}
\overline{-z^{-1}} &= -\left(\overline{z}\right)^{-1}\\
\overline{\frac{-1}{a+b\,\mathrm{i}}} &= \frac{-1}{\overline{a+b\,\mathrm{i}}}\\
\frac{-1}{\overline{a+b\,\mathrm{i}}} &= \frac{-1}{a-b\,\mathrm{i}}\\
\frac{-1}{a-b\,\mathrm{i}} &= \frac{-1}{a-b\,\mathrm{i}}
\end{aligned}$$

Die Aussage gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(i)
$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(z) &= \mathrm{Im}\left(\overline{z}\right)\\
\mathrm{Im}(a+b\,\mathrm{i}) &= \mathrm{Im}\left(\overline{a+b\,\mathrm{i}}\right)\\
b &= \mathrm{Im}(a-b\,\mathrm{i})\\
b &= -b\\
2b &= 0
\end{aligned}$$

Die Aussage gilt für alle $z \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 1.21

(a) $\overline{(2+3\,\mathrm{i})+(4-7\,\mathrm{i})} = \overline{6-4\,\mathrm{i}} = 6+4\mathrm{i}$

(b) $\overline{(-1+2\,\mathrm{i})\cdot(3-3\,\mathrm{i})} = \overline{3+9\,\mathrm{i}} = 3-9\,\mathrm{i}$

oder:

$$\begin{aligned}
\overline{(-1+2\,\mathrm{i})\cdot(3-3\,\mathrm{i})} &= \overline{(-1+2\,\mathrm{i})}\cdot\overline{(3-3\,\mathrm{i})}\\
&= (-1-2\,\mathrm{i})\cdot(3+3\,\mathrm{i}) = 3-9\,\mathrm{i}
\end{aligned}$$

(c) $(\overline{6+4\,\mathrm{i}}) - (\overline{5+3\,\mathrm{i}}) = 6-4\,\mathrm{i}-(5-3\,\mathrm{i}) = 1-\mathrm{i}$

(d)
$$\begin{aligned}
\overline{(18-\mathrm{i})} : \overline{(4-3\,\mathrm{i})} &= \frac{18+\mathrm{i}}{4+3\,\mathrm{i}} = \frac{(18+\mathrm{i})(4-3\,\mathrm{i})}{(4+3\,\mathrm{i})(4-3\,\mathrm{i})}\\
&= \frac{75-50\,\mathrm{i}}{25} = 3-2\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.22

Merke: $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

(a) $\overline{a+\overline{b}} - \big(\overline{a}+b\big) = \overline{a} + b - \overline{a} - b = 0$

(b) $\overline{\overline{a}\,b} \cdot \overline{\big(\overline{a}/b\big)} = a\,\overline{b} \cdot a/\overline{b} = a^2$

(c) $\overline{\big(a\,\overline{b}\big)^3} \cdot \overline{(b:a)^3} = \overline{a}^3 \cdot b^3 \cdot \overline{b}^3 : \overline{a}^3 = (b \cdot \overline{b})^3 = \big(|b|^2\big)^3 = |b|^6$

(d)
$$\begin{aligned}\big(\overline{a+b}\big) \cdot a - \overline{b} \cdot \big(\overline{\overline{a}+b}\big) &= \overline{a}a + a\overline{b} - a\overline{b} - \overline{b}\,\overline{b} = \overline{a}a - \overline{b}\,\overline{b} \\ &= |a|^2 - \overline{b}^2\end{aligned}$$

Aufgabe 1.23

(a) $\big|(3+4\,\mathrm{i})(5-7\,\mathrm{i})\big| = \big|(3+4\,\mathrm{i})\big| \cdot \big|(5-7\,\mathrm{i})\big| = \sqrt{25} \cdot \sqrt{74} = 5\sqrt{74}$

(b) $\big|(3+4\,\mathrm{i}) + (5-7\,\mathrm{i})\big| = \big|8-3\mathrm{i}\big| = \sqrt{73}$

(c) $\big|(2+3\,\mathrm{i})^2\big| = \big|(2+3\,\mathrm{i})\big|^2 = \big(\sqrt{13}\big)^2 = 13$

(d)
$$\begin{aligned}\big|(21+220\mathrm{i}) : (12+5\,\mathrm{i})\big| &= \big|21+220\mathrm{i}\big| : \big|12+5\,\mathrm{i}\big| \\ &= 221 : 13 = 17\end{aligned}$$

(e) $\big|(7+16\mathrm{i}) - (12-4\,\mathrm{i})\big| = \big|-5+20\mathrm{i}\big| = 5\big|-1+4\,\mathrm{i}\big| = 5\sqrt{17}$

(f) $\big|(1+\mathrm{i})^7\big| = |1+\mathrm{i}|^7 = \sqrt{2}^7 = 8\sqrt{2}$

Aufgabe 1.24

(a) $z - \overline{z} = (x+iy) - (x-iy) = 2iy$ imaginär

(b) $z \cdot \overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$ reell

(c)
$$\begin{aligned}\frac{\overline{z}}{z} - \frac{z}{\overline{z}} &= \frac{\overline{z}\cdot\overline{z} - z \cdot z}{z\overline{z}} = \frac{(x-iy)^2 - (x+iy)^2}{x^2+y^2} \\ &= \frac{x^2 - 2iy - y^2 - (x^2 + 2iy + y^2)}{x^2+y^2} \\ &= \frac{-4i}{x^2+y^2} \text{ imaginär}\end{aligned}$$

(d) $iz - i\overline{z} = i(x+iy) - i(x-iy) = ix - y - (ix+y) = -2y$ reell

(e) $\mathrm{i}(x+iy)+\mathrm{i}\,(x-iy) = ix - y + x\,\mathrm{i} + y = 2x\,\mathrm{i}$ imaginär

(f) $\dfrac{z+\overline{z}}{2z\overline{z}} = \dfrac{x+iy+(x-iy)}{2(x^2+y^2)} = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$ reell

(a)
$$\begin{aligned} |z+2\,\mathrm{i}|^2 + 4\ \mathrm{Im}\left(\overline{z}\right) &= |x+y\,\mathrm{i}+2\,\mathrm{i}|^2 + 4\,\mathrm{Im}(x-y\,\mathrm{i}) \\ &= x^2+(y+2)^2-4y \\ &= x^2+y^2+4y+4-4y \\ &= |z|^2+4 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\left(8\,\mathrm{i}\,\overline{z}\right) + |z-3\,\mathrm{i}|^2 - |z+\mathrm{i}|^2 \\ &= \mathrm{Re}(8\,\mathrm{i}(x-y\,\mathrm{i})) + |x+\mathrm{i}(y-3)| - |x+\mathrm{i}(y+1)|^2 \\ &= \mathrm{Re}(8\,\mathrm{i}x+8y) + x^2 + (y-3)^2 - (x^2+(y+1)^2) \\ &= 8y + y^2 - 6y + 9 - (x^2+y^2+2y+1) \\ &= 8y - 8y + 8 = 8 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} &|3z+4\,\mathrm{i}|^2 + |4\overline{z}+3\,\mathrm{i}|^2 - |5z|^2 \\ &= |3(x+y\,\mathrm{i})+4\,\mathrm{i}|^2 + |4x-4y\,\mathrm{i}+3\,\mathrm{i}|^2 - 25(x^2+y^2) \\ &= |3x+\mathrm{i}(3y+4)|^2 + |4x-\mathrm{i}(4y-3)|^2 - 25x^2 - 25y^2 \\ &= 9x^2+(3y+4)^2+16x^2+(4y-3)^2-25x^2-25y^2 \\ &= 9x^2+9y^2+24y+16+16x^2+16y^2-24y+9-5x^2-5y^2 \\ &= 16+9 = 25 \end{aligned}$$

Aufgabe 1.26

(a) linke Seite:

$$|z|^2 = |x+iy|^2 = \sqrt{x^2+y^2}^2 = x^2+y^2$$

rechte Seite:

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Re}^2(z) - \mathrm{Re}(z^2) &= 2\,\mathrm{Re}^2(x+iy) - \mathrm{Re}((x+iy)^2) \\ &= 2x^2 - \mathrm{Re}(x^2+2ixy-y^2) \\ &= 2x^2-(x^2-y^2) \\ &= x^2+y^2 \end{aligned}$$

(b) linke Seite:

$$\begin{aligned} |z+\mathrm{i}\,\overline{z}|^2 &= |(x+iy)+i(x-iy)|^2 \\ &= |x+iy+ix+y|^2 \\ &= |(x+y)+i(x+y)|^2 \\ &= (x+y)^2+(x+y)^2 = 2(x+y)^2 \end{aligned}$$

rechte Seite:

$$\begin{aligned}2|z|^2 + 2\operatorname{Im}(z^2) &= 2(x^2+y^2) + 2\operatorname{Im}((x+iy)^2)\\ &= 2x^2+2y^2+2\operatorname{Im}(x^2+2ixy-y^2)\\ &= 2x^2+2y^2+4xy\\ &= 2(x^2+2xy+y^2)\\ &= 2(x+y)^2\end{aligned}$$

Aufgabe 2.1

(a) $r = \sqrt{3^2+4^2} = 5$
$\varphi = \arctan\frac{4}{3} = 0.927$
$z = (5, 0.927\,\text{rad}) = 5\ \operatorname{cis} 0.927$

(b) $r = \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5$
$\varphi = \arctan(\frac{4}{-3}) + \pi = 2.214$
$z = (5, 2.214\,\text{rad})5\ \operatorname{cis} 2.214$

(c) $\sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = 5$
$\varphi = \arctan(\frac{-4}{-3}) + \pi = 4.069$
$z = (5, 4.069\,\text{rad}) = 5\ \operatorname{cis} 4.069$

(d) $\sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$
$\varphi = \arctan(\frac{-4}{3}) + 2\pi = 5.356$
$z = (5, 5, 356\text{rad}) = 5 \operatorname{cis} 5.356$

(e) $r = \sqrt{4.4^2+3.3^2} = 5.5$
$\varphi = \arctan(\frac{3.3}{4.4}) = 0.644$
$z = (5.5, 0.644\text{rad}) = 5.5\ \operatorname{cis} 0.644$

(f) $r = \sqrt{(-4.4)^2+3.3^2} = 5$
$\varphi \arctan(\frac{3.3}{-4.4}) + \pi = 2.498$
$z = 5.5\ \operatorname{cis} 2.498$

(g) $r = \sqrt{12^2+5^2} = 13$
$\varphi = \arctan\frac{5}{12} = 0.395$
$z = (13, 0.395\,\text{rad}) = 13\ \operatorname{cis} 0.395$

(h) $r = \sqrt{12^2+(-5)^2} = 13$
$\varphi = \arctan(\frac{-5}{12}) + 2\pi = 5.888$
$z = (13, 5.888\,\text{rad}) = 13\ \operatorname{cis} 5.888$

Aufgabe 2.2

(a) $2 + 2\,\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\ \mathrm{cis}\,45°$

(b) $-2 + 2\,\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,135°$

(c) $-2 - 2\,\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\ \mathrm{cis}\,225°$

(d) $2 - 2\,\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\ \mathrm{cis}\,315°$

(e) $3 = 3\ \mathrm{cis}\,0°$

(f) $3\,\mathrm{i} = 3\ \mathrm{cis}\,90°$

(g) $-3 = 3\ \mathrm{cis}\,180°$

(h) $-3\,\mathrm{i} = 3\,\mathrm{cis}\,270°$

(i) $2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i} = 4\ \mathrm{cis}\,60°$

(j) $-2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i} = 4\ \mathrm{cis}\,120°$

(k) $-6\sqrt{2} - 6\sqrt{2}\,\mathrm{i} = 12\ \mathrm{cis}\,225°$

(l) $6\sqrt{2} - 6\sqrt{2}\,\mathrm{i} = 12\ \mathrm{cis}\,315°$

Aufgabe 2.3

(a) $4\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{2} = 4\,\mathrm{i}$

(b) $3\,\mathrm{cis}\,0 = 3$

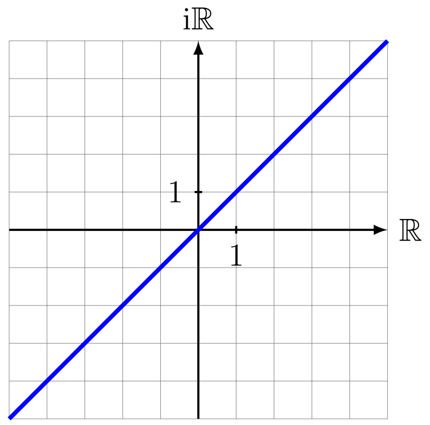
(c) $2\,\mathrm{cis}\,\pi = -2$

(d) $2.5\,\mathrm{cis}\,\frac{3\pi}{2} = -2.5\,\mathrm{i}$

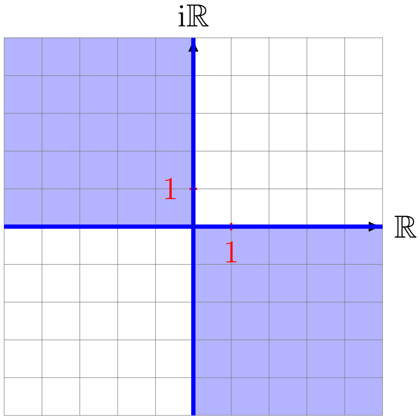
(e) $8\,\mathrm{cis}\,\frac{5\pi}{4} = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\,\mathrm{i}$

(f) $2\,\mathrm{cis}\,\frac{7\pi}{6} = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$

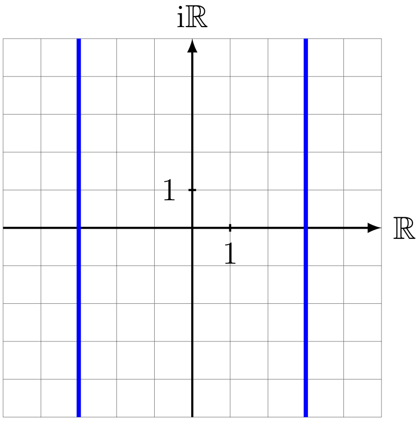
Aufgabe 2.4



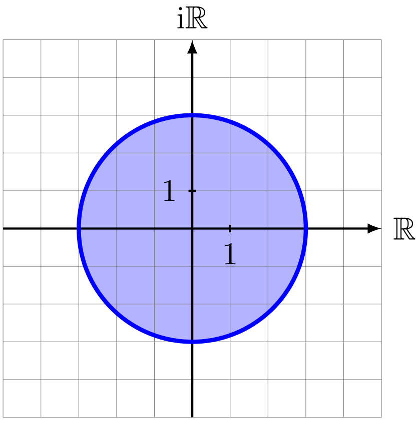
Aufgabe 2.5



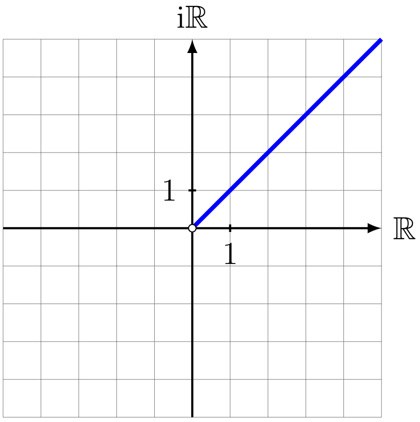
Aufgabe 2.6



Aufgabe 2.7

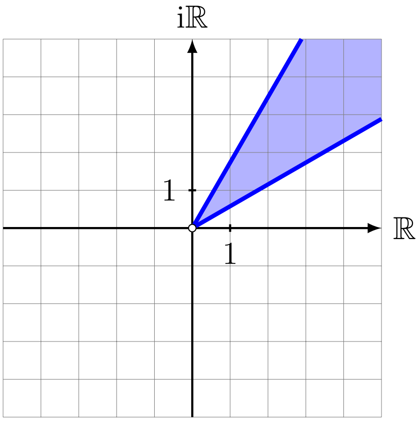


Aufgabe 2.8

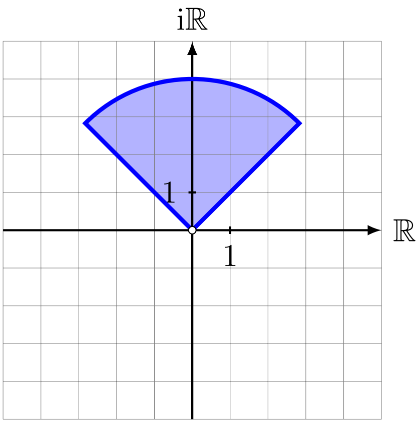


Achtung: arg(0) ist nicht definiert.

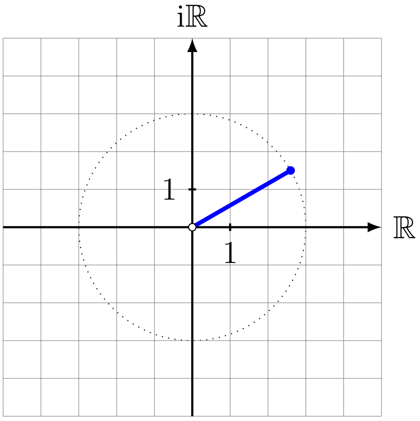
Aufgabe 2.9



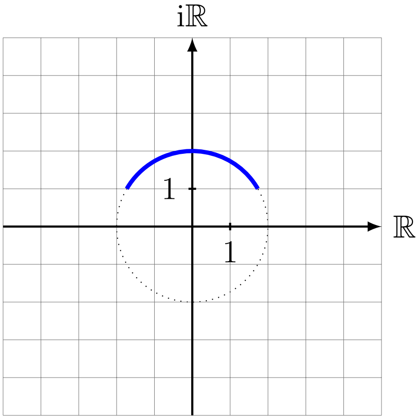
Aufgabe 2.10



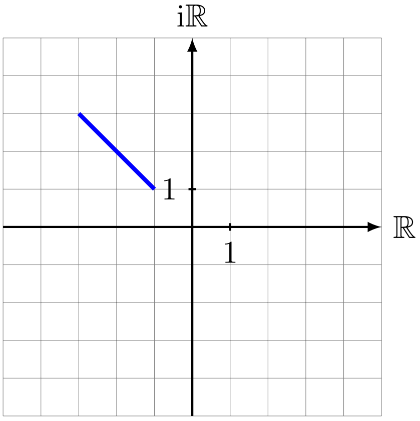
Aufgabe 2.11



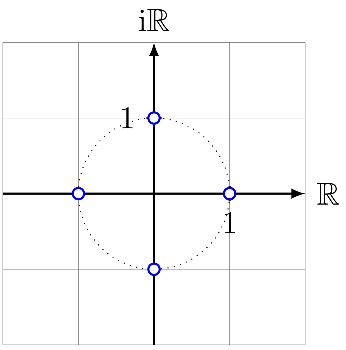
Aufgabe 2.12



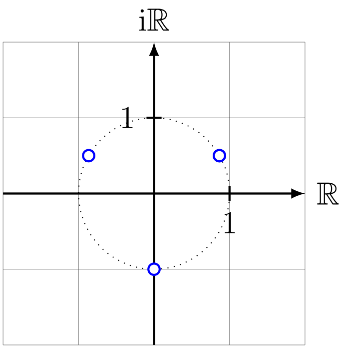
Aufgabe 2.13



Aufgabe 2.14



Aufgabe 2.15



Aufgabe 2.16

(a) $\operatorname{cis} 20° \cdot \operatorname{cis} 30° = \operatorname{cis} 50°$

(b) $\operatorname{cis} 141° \cdot \operatorname{cis} 247° = \operatorname{cis} 388° = \operatorname{cis} 28°$

(c) $\operatorname{cis} 145° \cdot \operatorname{cis} 85° \cdot \operatorname{cis} 23° = \operatorname{cis} 253°$

(d) $\operatorname{cis} 90° \cdot \operatorname{cis} 100° \cdot \operatorname{cis} 110° \cdot \operatorname{cis} 120° = \operatorname{cis} 420° = \operatorname{cis} 60°$

Aufgabe 2.17

(a) $\operatorname{cis} 150° : \operatorname{cis} 60° = \operatorname{cis} 90°$

(b) $\operatorname{cis} 250° : \operatorname{cis} 300° = \operatorname{cis}(-50°) = \operatorname{cis} 310°$

(c) $(\operatorname{cis} 30° : \operatorname{cis} 60°) : \operatorname{cis} 200° = \operatorname{cis}(-230°) = \operatorname{cis} 130°$

(d) $\operatorname{cis} 140° : (\operatorname{cis} 20° : \operatorname{cis} 50°) = \operatorname{cis} 170°$

Aufgabe 2.18

(a) $(\operatorname{cis} 30°)^2 = \operatorname{cis} 60°$

(b) $(\operatorname{cis} 75°)^6 = \operatorname{cis} 450° = \operatorname{cis} 90°$

(c) $(\operatorname{cis} 25°)^{-8} \cdot (\operatorname{cis} 35°)^4 = \operatorname{cis}(-60°) = \operatorname{cis} 300°$

(d) $(\operatorname{cis} 12°)^{15} : (\operatorname{cis} 15°)^{12} = \operatorname{cis} 0°$

Aufgabe 2.19

(a) $\operatorname{cis}\varphi \cdot \operatorname{cis}(-\varphi) = \operatorname{cis} 0° = 1$

(b) $\operatorname{cis}\varphi : \operatorname{cis}(-\varphi) = \operatorname{cis} 2\varphi$

(c)
$$\begin{aligned}\operatorname{cis}\varphi + \operatorname{cis}(-\varphi) &= (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) + (\cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi))\\ &= \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi + \cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi\\ &= 2\cos\varphi\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}\operatorname{cis}\varphi - \operatorname{cis}(-\varphi) &= (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) - (\cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi))\\ &= \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi - \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\\ &= 2\mathrm{i}\ \cos\varphi\end{aligned}$$

Aufgabe 2.20

(a)
$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{20} \operatorname{cis}\frac{k\cdot\pi}{5} &= \operatorname{cis}\frac{(1+2+3\ldots+20)\cdot\pi}{5}\\ &= \operatorname{cis}\frac{210\cdot\pi}{5} = \operatorname{cis} 42\cdot\pi = 1\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{19} \operatorname{cis}\frac{k\cdot 2\pi}{9} &= \operatorname{cis}\frac{(0+1+2+\ldots+19)\cdot 2\pi}{9}\\ &= \operatorname{cis}\frac{190\cdot 2\pi}{9} = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{9} = \operatorname{cis} 40°\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{5} \operatorname{cis}\frac{k\cdot\pi}{3} &= \ldots\\ &= 0\end{aligned}$$

Aufgabe 2.21

(a)
$$\begin{aligned}&(\cos 15° + \mathrm{i}\ \sin 15°)\cdot(\cos 60° + \mathrm{i}\ \sin 60°)\\ &= \operatorname{cis}(15°)\cdot\operatorname{cis}(60°) = \operatorname{cis} 75°\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}&(\cos 25° - \mathrm{i}\ \sin 25°)\cdot(\cos 35° - \mathrm{i}\ \sin 35°)\\ &= \frac{1\cdot 1}{(\cos 25° + \mathrm{i}\ \sin 25°)\cdot(\cos 35° + \sin 35°)}\\ &= \frac{1}{\operatorname{cis}(25°)\cdot\operatorname{cis}(35°)} = \frac{\operatorname{cis}(360°)}{\operatorname{cis}(60°)} = \operatorname{cis}(300°)\end{aligned}$$

(c) $\dfrac{\cos 75° + \mathrm{i}\,\sin 75°}{\cos 45° - \mathrm{i}\,\sin 45°}$

$$= \frac{(\cos 75° + \mathrm{i}\,\sin 75°)\cdot(\cos 45° + \mathrm{i}\,\sin 45°)}{(\cos 45° - \mathrm{i}\,\sin 45°)\cdot(\cos 45° + \mathrm{i}\,\sin 45°)}$$

$$= \frac{\mathrm{cis}(75°)\cdot\mathrm{cis}(45°)}{\cos^2 45° + \sin^2 45°} = \frac{\mathrm{cis}(120°)}{1} = \mathrm{cis}(120°)$$

(d) $\dfrac{\cos 210° + \mathrm{i}\,\sin 210°}{\cos 150° + \mathrm{i}\,\sin 150°} = \dfrac{\mathrm{cis}(210°)}{\mathrm{cis}(150°)} = \mathrm{cis}\,60°$

Aufgabe 2.22

(a) $2^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\ln(2^{\mathrm{i}})} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\ln 2} = \cos(\ln 2) + \mathrm{i}\sin(\ln 2)$

(b) $\sqrt{\mathrm{i}} = \sqrt{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi/2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi/4} = \cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\,\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(c) $\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi/2}\right)^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}^2\cdot\pi/2} = \mathrm{e}^{-\pi/2}$

(d) $\ln(\mathrm{i}) = \ln\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi/2} = \mathrm{i}\cdot\dfrac{\pi}{2}\cdot\ln\,\mathrm{e} = \dfrac{\pi}{2}\cdot\mathrm{i}$

Aufgabe 3.1

Ansatz: $z = x + y\,\mathrm{i}$

$$\begin{aligned} 5(x + y\,\mathrm{i}) - 3x - 8 &= 4y + 10\,\mathrm{i} \\ 5x + 5y\,\mathrm{i} - 3x - 8 &= 4y + 10\,\mathrm{i} \\ 2x - 4y + 5y\mathrm{i} &= 8 + 10\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

Vergleich der Real- und Imaginärteile: $2x - 4y = 8 \quad (1)$
$5y = 10 \quad (2)$

Aus (2) folgt $y = 2$ und damit $x = 8$ aus (1)

Insgesamt: $z = 8 + 2\,\mathrm{i}$

Aufgabe 3.2

Ansatz: $z = x + y\,\mathrm{i}$

$$\begin{aligned} \mathrm{i}(x + y\,\mathrm{i}) - 2(x - y\,\mathrm{i}) &= 6x\,\mathrm{i} + 8 + 11\,\mathrm{i} \\ x\,\mathrm{i} - y - 2x + 2y\,\mathrm{i} &= 6x\,\mathrm{i} + 8 + 11\,\mathrm{i} \\ -5x\,\mathrm{i} - y - 2x + 2y\,\mathrm{i} &= 8 + 11\,\mathrm{i} \\ (-2x - y) + (-5x + 2y)\mathrm{i} &= 8 + 11\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

Vergleich der Real- und Imaginärteile: $-2x - y = 8 \quad (1)$
$-5x + 2y = 11 \quad (2)$

Addiere das Doppelte von Gleichung (1) zur Gleichung (2):

$-9x = 27 \quad \Rightarrow \quad x = -3 \quad \Rightarrow \quad y = -2$

$z = -3 - 2\,\mathrm{i}$

Aufgabe 3.3

Ansatz: $z = x + y\,\mathrm{i}$

$$\begin{aligned} x + y\,\mathrm{i} + 2\mathrm{i}(x + y\,\mathrm{i}) &= 8 + 6\,\mathrm{i} \\ x + y\,\mathrm{i} + 2x\,\mathrm{i} - 2y &= 8 + 6\,\mathrm{i} \\ (x - 2y) + (2x + y)\mathrm{i} &= 8 + 6\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

Vergleich der Real- und Imaginärteile: $x - 2y = 8 \quad (1)$
$2x + y = 6 \quad (2)$

Addiere das Doppelte von Gleichung (2) zur Gleichung (1):

$5x = 20 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \quad \Rightarrow \quad y = -2$

$z = 4 - 2\,\mathrm{i}$

Aufgabe 3.4

Klammere $(3 + 2\,\mathrm{i})$ aus:

$$\begin{aligned} (3 + 2\,\mathrm{i})\big[(z + 4\,\mathrm{i}) - (z + 2)\big] &= 6 - 8\,\mathrm{i} \\ (3 + 2\,\mathrm{i})(-2 + 4\mathrm{i}) &= 6 - 8\,\mathrm{i} \\ -6 - 8 + 12\mathrm{i} - 4\mathrm{i} &= 6 - 8\,\mathrm{i} \\ 0 &= 20 - 16\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

Die Gleichung kann nicht erfüllt werden.
$L = \{ \ \}$

Aufgabe 3.5

$$\begin{aligned} \frac{z - 3\,\mathrm{i} - 3}{z + 2 + 4\,\mathrm{i}} &= \mathrm{i} \\ z - 3\,\mathrm{i} - 3 &= \mathrm{i}(z + 2 + 4\,\mathrm{i}) \\ z - 3\,\mathrm{i} - 3 &= z\,\mathrm{i} + 2\,\mathrm{i} + 4\,\mathrm{i}^2 \\ z - z\,\mathrm{i} &= 2\,\mathrm{i} - 4 + 3\,\mathrm{i} + 3 \\ z(1 - \mathrm{i}) &= -1 + 5\,\mathrm{i} \quad || \cdot (1 + \mathrm{i}) \\ z(1 - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i}) &= (-1 + 5\,\mathrm{i})(1 + \mathrm{i}) \\ 2z &= -1 - \mathrm{i} + 5\,\mathrm{i} - 5 \\ 2z &= -6 + 4\,\mathrm{i} \\ z &= -3 + 2\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.6

Ansatz: $z = x + y\,\mathrm{i}$

$$\begin{aligned}(2+\mathrm{i})(x+y\,\mathrm{i}) - 3\,\mathrm{Re}(x+y\,\mathrm{i}) &= -18+30\,\mathrm{i}\\ 2x - y + 2y\,\mathrm{i} + x\,\mathrm{i} - 3x &= -18+30\,\mathrm{i}\\ -x - y + (x+2y)\,\mathrm{i} &= -18+30\,\mathrm{i}\end{aligned}$$

Vergleich der Real- und Imaginärteile: $-x - y = -18 \quad (1)$

$x + 2y = 30 \quad (2)$

Addiere das Doppelte von Gleichung (1) zur Gleichung (2):

$-x = -6 \quad \Rightarrow \quad x = 6$

Addiere Gleichungen (1) und (2):

$y = 12$

$z = 6 + 12\,\mathrm{i}$

Aufgabe 3.7

$3z_1 + 2z_2 = 7 + \mathrm{i}$

$5z_1 - 3z_2 = -1 + 8\mathrm{i}$

Das dreifache der oberen Gleichung zum doppelten der unteren addieren:

$19z_1 = 19 + 19\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad z_1 = 1 + \mathrm{i}$

z_1 in die obere Gleichung einsetzen:

$3(1+\mathrm{i}) + 2z_2 = 7 + \mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad 2z_2 = 4 - 2\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad z_2 = 2 - \mathrm{i}$

Aufgabe 3.8

...

$L = \{(2\mathrm{i}, -3)\}$

Aufgabe 3.9

$z^4 = 16 \cdot \mathrm{cis}(0°)$

$$z_k = \sqrt[4]{16} \cdot \mathrm{cis}\left(\frac{0 + k \cdot 360°}{4}\right) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$z_0 = 2 \cdot \mathrm{cis}(0°) = 2$

$z_1 = 2 \cdot \mathrm{cis}(90°) = 2\,\mathrm{i}$

$z_2 = 2 \cdot \mathrm{cis}(180°) = 2 \cdot (-1) = -2$

$z_3 = 2 \cdot \mathrm{cis}(270°) = 2 \cdot (-\mathrm{i}) = -2\,\mathrm{i}$

Aufgabe 3.10

$$z^3 = 8 \cdot \mathrm{cis}(90°)$$

$$z_k = \sqrt[3]{8} \cdot \mathrm{cis}\left(\frac{90° + k \cdot 360°}{3}\right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z_0 = 2 \cdot \mathrm{cis}(30°) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) = \sqrt{3} + \mathrm{i}$$

$$z_1 = 2 \cdot \mathrm{cis}(150°) = 2\,\mathrm{i} = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$$

$$z_2 = 2 \cdot \mathrm{cis}(270°) = 2 \cdot (-1) = -2$$

Aufgabe 3.11

$$r = \sqrt{32 + 32} = \sqrt{64} = 8$$

$$\varphi = \arctan \frac{2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} + 180° = -\arctan(1) + 180° = 135°$$

$$z^3 = 8 \cdot \mathrm{cis}(135°)$$

$$z_k = \sqrt[3]{8} \cdot \mathrm{cis}\left(\frac{135° + k \cdot 360°}{3}\right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z_0 = 2 \cdot \mathrm{cis}(45°) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{i}$$

$$z_1 = 2 \cdot \mathrm{cis}(45°) \cdot \mathrm{cis}(120°) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{i}\right) \cdot \left(-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)$$

$$= \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}$$

$$z_2 = 2 \cdot \mathrm{cis}(45°) \cdot \mathrm{cis}(240°) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{i}\right) \cdot \left(-1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)$$

$$= \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} + \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}$$

Aufgabe 3.12

$$D = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 29 = 16 - 116 = -100 = 100\,\mathrm{i}^2$$

$$x_1 = \frac{b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{100\,\mathrm{i}^2}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 10\,\mathrm{i}}{2} = 2 + 5\,\mathrm{i}$$

$$x_2 = \cdots = 2 - 5\,\mathrm{i}$$

Aufgabe 3.13

$$D = b^2 - 4ac = (2\mathrm{i})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = -4 + 40 = 36$$

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2\mathrm{i} + 6}{2} = 3 + \mathrm{i}$$

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{2\mathrm{i} - 6}{2} = -3 + \mathrm{i}$$

Aufgabe 3.14

$$\begin{aligned} d^2 &= 5 - 12\mathrm{i} \\ (x + y\,\mathrm{i})^2 &= 5 - 12\mathrm{i} \\ x^2 - y^2 + 2xy\,\mathrm{i} &= 5 - 12\mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 5 \\ 2xy &= -12 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 3 \\ y_1 &= -2 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} x_2 &= -3 \\ y_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$z_1 = 3 - 2\,\mathrm{i}$$

$$z_2 = -3 + 2\,\mathrm{i}$$

Aufgabe 3.15

$$\begin{aligned} (2 - \mathrm{i})z^2 + (6 - 8\mathrm{i})z &= 0 \\ z\big[(2 - \mathrm{i})z + (6 - 8\mathrm{i})\big] &= 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 0 \\ (2 - \mathrm{i})z + (6 - 8\mathrm{i}) &= 0 \end{aligned}$$

$$z_2 = \frac{-6 + 8\mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}} = \frac{(-6 + 8\mathrm{i})(2 + \mathrm{i})}{(2 - \mathrm{i})(2 + \mathrm{i})}$$

$$z_2 = \frac{-20 - 10\mathrm{i}}{5} = -4 - 2\mathrm{i}$$

Aufgabe 3.16

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac = (4 + 4\mathrm{i})^2 - 4(6 - 2\mathrm{i})(-1 + \mathrm{i}) \\ &= (0 + 32\mathrm{i}) - 4(-4 + 8\mathrm{i}) = 16 \end{aligned}$$

$$z_1 = \frac{-(4+4\mathrm{i})+4}{2(6-2\mathrm{i})} = \frac{-4\mathrm{i}}{4(3-\mathrm{i})} = \frac{-\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}$$
$$= \frac{-\mathrm{i}(3+\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})} = \frac{1-3\mathrm{i}}{10} = 0.1 - 0.3\mathrm{i}$$

$$z_2 = \frac{-(4+4\mathrm{i})-4}{2(6-2\mathrm{i})} = \frac{-8-4\mathrm{i})}{4(3-\mathrm{i})} = \frac{-2-\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}$$
$$= \frac{(-2-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})} = \frac{-5-5\mathrm{i}}{10} = -0.5 - 0.5\mathrm{i}$$

Aufgabe 3.17

$$D = b^2 - 4ac = (2-6\mathrm{i})^2 - 4\cdot 1(7+2\mathrm{i})$$
$$= (-32-24\mathrm{i}) - 28 - 8\mathrm{i} = -60 - 32\mathrm{i} = (x+y\mathrm{i})^2$$

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= -60 \\ 2xy &= -32 \end{aligned} \quad \overset{\text{raten}}{\Rightarrow} \quad \begin{aligned} d_1 &= 2 - 8\mathrm{i} \\ d_2 &= -2 + 8\mathrm{i} \end{aligned}$$

$$z_1 = \frac{-2+6\mathrm{i}+2-8\mathrm{i}}{2} = \frac{-2\mathrm{i}}{2} = -\mathrm{i}$$

$$z_2 = \frac{-2+6\mathrm{i}-2+8\mathrm{i}}{2} = \frac{-4+14\mathrm{i}}{2} = -2+7\mathrm{i}$$

Aufgabe 3.18

$$D = b^2 - 4ac = (3\mathrm{i})^2 - 4\cdot(-3-\mathrm{i})$$
$$= -9 + 12 + 4\mathrm{i} = 3 + 4\mathrm{i} = (x+y\mathrm{i})^2$$

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 3 \\ 2xy &= 4 \end{aligned} \quad \overset{\text{raten}}{\Rightarrow} \quad \begin{aligned} d_1 &= 2 + 1\mathrm{i} \\ d_2 &= -2 - 1\mathrm{i} \end{aligned}$$

$$z_1 = \frac{-3\mathrm{i}+2+\mathrm{i}}{2} = \frac{2-2\mathrm{i}}{2} = 1-\mathrm{i}$$

$$z_2 = \frac{-3\mathrm{i}-2-\mathrm{i}}{2} = \frac{-2-4\mathrm{i}}{2} = -1-2\mathrm{i}$$

Aufgabe 3.19

normierte Form: $x^3 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$

$r = -3,\ s = -3,\ t = -4$

$$p = s - \frac{r^2}{3} = -6$$

$$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = -9$$

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -8 + \frac{81}{4} = \frac{49}{4} > 0$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} = \sqrt[3]{-\frac{-9}{2} + \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} = \sqrt[3]{-\frac{-9}{2} - \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$y_1 = u + v = 3$$

$$y_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

$$y_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

$$x_1 = y_1 - \frac{r}{3} = 3 - (-1) = 4$$

$$x_2 = y_2 - \frac{r}{3} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i} - (-1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

$$x_3 = y_3 - \frac{r}{3} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i} - (-1) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

Aufgabe 3.20

normierte Form: $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0$

$r = -3,\ s = -9,\ t = -5$

$$p = s - \frac{r^2}{3} = -9 - 3 = -12$$

$$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = -2 - 9 - 5 = -16$$

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = (-4)^3 + (-8)^2 = -64 + 64 = 0$$

$$y_1 = -\sqrt[3]{4q} = -\sqrt[3]{-64} = 4$$

$$y_2 = y_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$x_1 = y_1 - \frac{r}{3} = 4 + 1 = 5$$

$$x_2 = y_2 - \frac{r}{3} = -2 + 1 = -1$$

$$x_3 = x_2 = -1$$

Aufgabe 3.21

$x^3 - 6x^2 + 4 = 0$ (reduzierte Form, da $r = 0$)

$p = -6$, $q = 4$

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = (-2)^3 + 2^2 = -8 + 4 = -4$$

$$\varrho = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3} = \sqrt{-(-2)^3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos(\varphi) = -\frac{q}{2\varrho} = -\frac{4}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 135°$$

$$y_1 = 2\sqrt[3]{\varrho}\cos\frac{\varphi}{3} = 2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\cos(45°) = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

$$\begin{aligned} y_2 &= 2\sqrt[3]{\varrho}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120°\right) = 2\sqrt{2}\cos(45° + 120°) \\ &= 2\sqrt{2}\left[\cos(45°)\cos(120°) - \sin(45°)\sin(120°)\right] \\ &= 2\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -1 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Beachte: $\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240°\right) = \cos\left(\frac{\varphi}{3} - 120°\right)$

$$\begin{aligned} y_3 &= 2\sqrt[3]{\varrho}\cos\left(\frac{\varphi}{3} - 120°\right) = 2\sqrt{2}\cos(45° - 120°) \\ &= 2\sqrt{2}\left[\cos(45°)\cos(120°) + \sin(45°)\sin(120°)\right] \\ &= 2\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -1 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

wegen $r = 0$ (die Gleichung war bereits reduziert) gilt:

$$x_1 = y_1 - \frac{r}{3} = 2$$

$$x_2 = y_2 - \frac{r}{3} = -1 - \sqrt{3}$$

$$x_3 = y_3 - \frac{r}{3} = -1 + \sqrt{3}$$

Aufgabe 3.22

Allgemeine Form: $2x^3 - 9x^2 + 9x + 7 = 0$

Normierte Form: $x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{7}{2} = 0$

$r = -\frac{9}{2}$, $s = \frac{9}{2}$, $t = \frac{7}{2}$

$$p = s - \frac{r^2}{3} = \cdots = -\frac{9}{4}$$

$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = \cdots = \frac{7}{2}$

$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \cdots = \frac{169}{64} > 0$

$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} = \cdots = -\frac{1}{2}$

$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} = \cdots = -\frac{3}{2}$

$y_1 = u + v = -2$

$y_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i} = \cdots = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

$y_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i} = \cdots = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

$x_1 = y_1 - \frac{r}{3} = \cdots = -\frac{1}{2}$

$x_2 = y_2 - \frac{r}{3} = \cdots = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

$x_3 = y_3 - \frac{r}{3} = \cdots = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

Aufgabe 3.23

Normierte Form: $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = 0$

$r = 5,\ s = 7,\ t = 3$

$p = s - \frac{r^2}{3} = \cdots = -\frac{4}{3}$

$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = \cdots = \frac{16}{27}$

$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \cdots = 0$

$y_1 = -\sqrt[3]{4q} = \cdots = -\frac{4}{3}$

$y_2 = y_3 = -\sqrt[3]{\frac{q}{2}} = \cdots = \frac{2}{3}$

$x_1 = y_1 - \frac{r}{3} = \cdots = -3$

$x_2 = x_3 = y_2 - \frac{r}{3} = \cdots = -1$

Aufgabe 3.24

normierte Form: $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$

$r = -3,\ s = 0,\ t = 1$

$$p = s - \frac{r^2}{3} = 0 - 3 = -3$$

$$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = \frac{2 \cdot (-27)}{27} - 0 + 1 = -1$$

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} < 0$$

$$\varrho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \sqrt{-\frac{-27}{27}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos(\varphi) = -\frac{q}{2\varrho} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 60°$$

$$y_1 = 2\sqrt[3]{\varrho} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) = 2\cos(20°)$$

$$y_2 = 2\sqrt[3]{\varrho} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120°\right) = 2\cos(140°)$$

$$y_2 = 2\sqrt[3]{\varrho} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240°\right) = 2\cos(260°)$$

$$x_1 = y_1 - \frac{r}{3} = 1 + \cos(20°)$$

$$x_2 = y_2 - \frac{r}{3} = 1 + \cos(140°)$$

$$x_3 = y_3 - \frac{r}{3} = 1 + \cos(260°)$$

Aufgabe 3.25

normierte Form: $x^3 - 3x^2 + 3x - 9 = 0$

$r = -3,\ s = 3,\ t = -9$

$$p = s - \frac{r^2}{3} = \cdots = 0$$

$$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = \cdots = -8$$

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \cdots = 16 > 0$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} = \cdots = 2$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} = \cdots = 0$$

$$y_1 = u + v = 2$$

$$y_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i} = \cdots = -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

$$y_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i} = \cdots = -1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

$$x_1 = y_1 - \frac{r}{3} = \cdots = 3$$

$x_2 = y_2 - \frac{r}{3} = \cdots = \sqrt{3}\,\mathrm{i}$

$x_3 = y_3 - \frac{r}{3} = \cdots = -\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

Aufgabe 3.26

$x^3 - 3x - 2 = 0$ (bereits in reduzierter Form)

$p = -3,\ q = -2$

$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \cdots = 0$

$y_1 = -\sqrt[3]{4q} = \cdots = 2$

$y_2 = y_3 = -\sqrt[3]{\frac{q}{2}} = \cdots = -1$

$x_1 = y_1 - \frac{r}{3} = \cdots = 2$

$x_2 = x_3 = y_2 - \frac{r}{3} = \cdots = -1$

Aufgabe 3.27

normierte Form: $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$

$r = -3,\ s = -6,\ t = 8$

$p = s - \frac{r^2}{3} = \cdots = -9$

$q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = \cdots = 0$

reduzierte Form: $y^3 - 9y = y(y^2 - 9) = 0$

Dieser Fall lässt sich direkt durch Faktorisieren lösen.

$y_1 = 0$

$y_2 = 3$

$y_3 = -3$

$x_1 = y_1 - \frac{r}{3} = \cdots = 1$

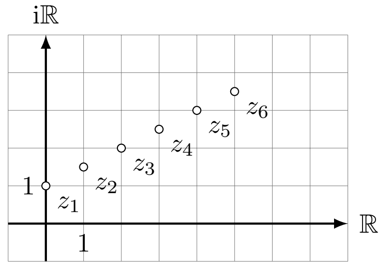
$x_2 = y_2 - \frac{r}{3} = \cdots = 4$

$x_3 = y_3 - \frac{r}{3} = \cdots = -2$

Aufgabe 4.1

(a) $z_1 = \mathrm{i},\ z_2 = 1 + 1.5\mathrm{i},\ z_3 = 2 + 2\mathrm{i},$

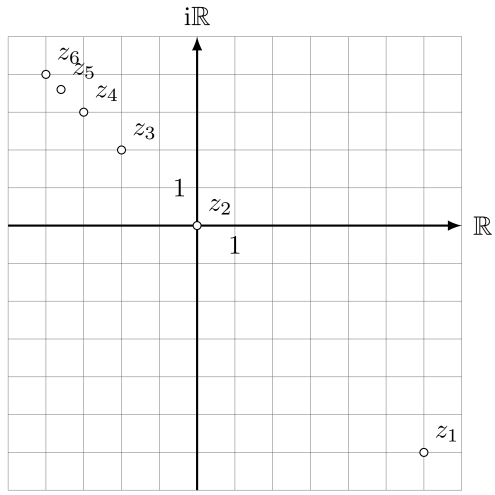
$z_4 = 3 + 2.5\mathrm{i},\ z_5 = 4 + 3\mathrm{i},\ z_6 = 5 + 3.5\mathrm{i},\ \ldots$



Die Folge (z_n) *divergiert.*

(b) $z_1 = 6 - 6\mathrm{i},\ z_2 = 0,\ z_3 = -2 + 2\mathrm{i},$

$z_4 = -3 + 3\mathrm{i},\ z_5 = -3.6 + 3.6\mathrm{i},\ z_6 = -4 + 4\mathrm{i},\ \ldots$



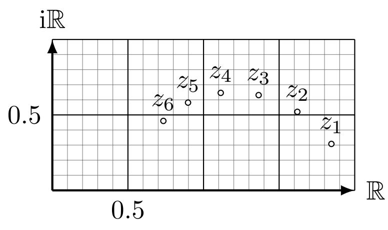
Die Folge (z_n) konvergiert gegen $-6 + 6\mathrm{i}$.

Aufgabe 4.2

(a) $z_1 \approx 1.9 + 0.31\mathrm{i},\ z_2 \approx 1.7 + 0.58\mathrm{i},\ z_3 \approx 1.5 + 0.77\mathrm{i},$

$z_4 \approx 1.2 + 0.88\mathrm{i},\ z_5 \approx 0.86 + 0.88\mathrm{i},\ z_6 \approx 0.56 + 0.78\mathrm{i},$

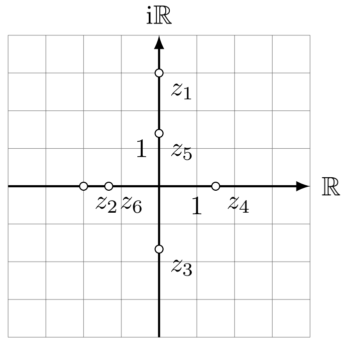
$z_7 \approx 0.32 + 0.59\mathrm{i},\ z_8 \approx 0.16 + 0.32\mathrm{i}$



Die Folge (z_n) konvergiert gegen 1.

(b) $z_1 = 3\mathrm{i},\ z_2 = -2,\ z_3 = -\frac{5}{3}\mathrm{i},\ z_4 = \frac{3}{2},$

$z_5 = \frac{7}{5}\mathrm{i}$, $z_6 = -\frac{4}{3}$, $z_7 = -\frac{9}{7}\mathrm{i}$, $z_8 = \frac{5}{4}$,



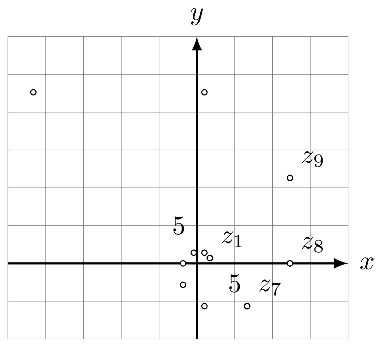
Die Folge (z_n) strebt gegen den Zyklus $\{\mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}, 1\}$.

Aufgabe 4.3

(a) $z_1 = 1$, $z_2 = 1 + \mathrm{i}$, $z_3 = 2\mathrm{i}$, $z_4 = -2 + 2\mathrm{i}$,

$z_5 = -4$, $z_6 = -4 - 4\mathrm{i}$, $z_7 = -8\mathrm{i}$, $z_8 = 8 - 8\mathrm{i}$,

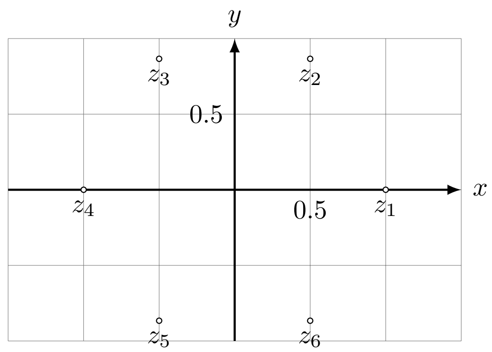
$z_9 = 16$, $z_{10} = 16 + 16\mathrm{i}$, $z_{11} = 32\mathrm{i}$, $z_{12} = -32 + 32\mathrm{i}$



Die Folge (z_n) divergiert.

(b) $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}$, $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}$, $z_4 = -1$,

$z_5 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}$, $z_6 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}$, $z_7 = 1 = z_1$, $z8 = z_2$, ...

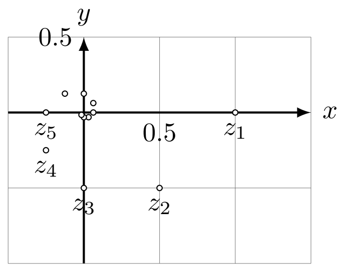


Die Folge (z_n) ist der Zyklus $\{\mathrm{cis}(k \cdot 60°) \colon k = 0, 1 \ldots, 5\}$

(c) $z_1 = 1.0,\ z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i},\ z_3 = -\frac{1}{2}\mathrm{i},\ z_4 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\mathrm{i},$

$z_5 = -\frac{1}{4},\ z_6 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\mathrm{i},\ z_7 = \frac{1}{8}\mathrm{i},\ z_8 = \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\mathrm{i},$

$z_9 = \frac{1}{16},\ z_{10} = \frac{1}{32} - \frac{1}{32}\mathrm{i},\ z_{11} = -\frac{1}{32}\mathrm{i},\ z_{12} = -\frac{1}{64} - \frac{1}{64}\mathrm{i}\ \ldots$



Die Folge (z_n) konvergiert gegen 0.

Aufgabe 4.4

(a) $q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{-4+4\mathrm{i}}{8\mathrm{i}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

$$z_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 8\mathrm{i} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{n-1}$$

(b) $s_n = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} = 8\mathrm{i} \cdot \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)}$

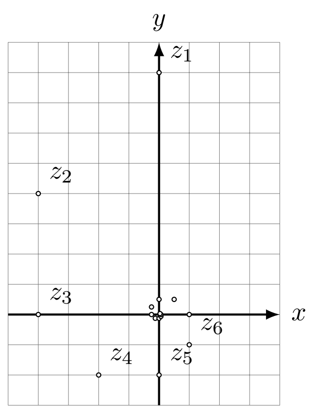
$$= \frac{8\mathrm{i}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}} \cdot \left[1 - \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n\right] = (-8+8\mathrm{i})\left[1 - \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n\right]$$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (8+8\mathrm{i})\left[1 - \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n\right]$$

$$= (-8+8\mathrm{i}) \lim_{n\to\infty} \left[1 - \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n\right] = (-8+8\mathrm{i})$$

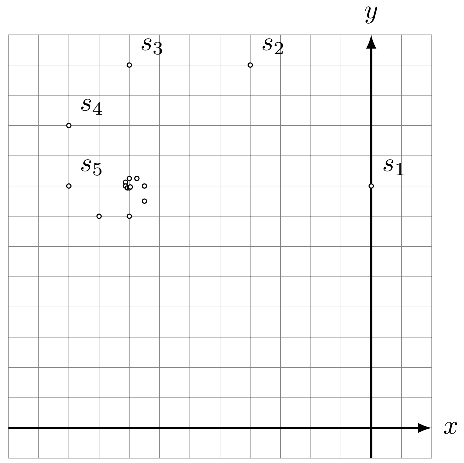
(c) $z_1 = 8\mathrm{i},\ z_2 = -4+4\mathrm{i},\ z_3 = -4,$

$z_4 = -2-2\mathrm{i},\ z_5 = -2\mathrm{i},\ z_6 = 1-\mathrm{i}$



$s_1 = 8\mathrm{i},\ s_2 = -4 + 12\mathrm{i},\ s_3 = -8 + 12\mathrm{i},$

$s_4 = -10 + 10\mathrm{i},\ s_5 = -10 + 8\mathrm{i},\ s_6 = -9 + 7\mathrm{i}$



Aufgabe 4.5

(a) $q = \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{4\mathrm{i}}{5} = \dfrac{4}{5}\mathrm{i} = 0.8\mathrm{i}$

$$z_n = 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\mathrm{i}\right)^{n-1} = 5 \cdot 0.8\mathrm{i}^{n-1}$$

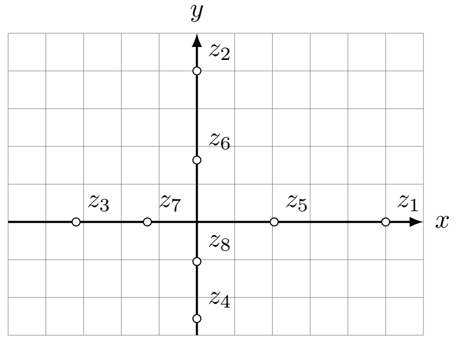
(b) $s_n = z_1 \cdot \dfrac{1 - q^n}{1 - q} = 5 \cdot \dfrac{1 - \left(\frac{4}{5}\mathrm{i}\right)^n}{1 - \frac{4}{5}\mathrm{i}}$

$$= \left(\frac{125}{41} + \frac{100}{41}\mathrm{i}\right)\left(1 - \left(\frac{4}{5}\mathrm{i}\right)^n\right)$$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{125}{41} + \frac{100}{41}\mathrm{i}$$

(c) $z_1 = 5,\ z_2 = 4\mathrm{i},\ z_3 = -\frac{16}{5} = -3.2,\ z_4 = -\frac{64}{25}\mathrm{i} = -2.56\mathrm{i},$

$z_5 = \frac{256}{125} = 2.048,\ z_6 = \frac{1024}{625}\mathrm{i} = 1.6384\mathrm{i}$

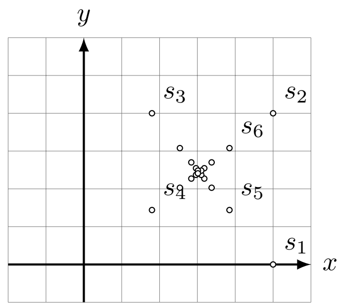


$s_1 = 5,\ s_2 = 5 + 4\mathrm{i},\ s_3 = \frac{9}{5} + 4\mathrm{i} = 1.8 + 4\mathrm{i},$

$s_4 = \frac{9}{5} + \frac{36}{25}\mathrm{i} = 1.8 + 1.44\mathrm{i},$

$s_5 = \frac{481}{125} + \frac{36}{25}\mathrm{i} = 3.848 + 1.44\mathrm{i},$

$s_6 = \frac{481}{125} + \frac{1924}{625}\mathrm{i} = 3.848 + 3.0784\mathrm{i}$



Aufgabe 4.6

(a) $f(z) = z + 1 + 3\mathrm{i}$

$z_1 = 0$

$z_2 = f(z_1) = 0 + 1 + 3\mathrm{i} = 1 + 3\mathrm{i}$

$z_3 = f(z_2) = 1 + 3\mathrm{i} + 1 + 3\mathrm{i} = 2 + 6\mathrm{i}$

$z_4 = f(z_3) = 2 + 6\mathrm{i} + 1 + 3\mathrm{i} = 3 + 9\mathrm{i}$

$z_5 = f(z_4) = 3 + 9\mathrm{i} + 1 + 3\mathrm{i} = 4 + 12\mathrm{i}$

$z_n = n - 1 + (3n - 3)\mathrm{i}$

(b) $f(z) = z + 1 + 3\mathrm{i}$

$z_1 = -1 + \mathrm{i}$

$z_2 = f(z_1) = -1 + \mathrm{i} + 1 + 3\mathrm{i} = 4\mathrm{i}$

$z_3 = f(z_2) = 4\mathrm{i} + 1 + 3\mathrm{i} = 1 + 7\mathrm{i}$

$z_4 = f(z_3) = 1 + 7\mathrm{i} + 1 + 3\mathrm{i} = 2 + 10\mathrm{i}$

$z_5 = f(z_4) = 2 + 10\mathrm{i} + 1 + 3\mathrm{i} = 3 + 13\mathrm{i}$

$z_n = n - 2 + (3n - 2)\mathrm{i}$

Aufgabe 4.7

(a) $f(z) = (1 + 2\mathrm{i})z$

$z_1 = 1$

$z_2 = f(z_1) = (1 + 2\mathrm{i}) \cdot 1 = 1 + 2\mathrm{i}$

$z_3 = f(z_2) = (1 + 2\mathrm{i}) \cdot (1 + 2\mathrm{i}) = -3 + 4\mathrm{i}$

$z_4 = f(z_3) = (1 + 2\mathrm{i}) \cdot (-3 + 4\mathrm{i}) = -11 - 2\mathrm{i}$

$z_5 = f(z_4) = (1 + 2\mathrm{i}) \cdot (-11 - 2\mathrm{i}) = -7 - 24\mathrm{i}$

$z_n = (1 + 2\mathrm{i})^{n-1}$

(b) $f(z) = (1+2\mathrm{i})z$

$z_1 = 1 + \mathrm{i}$

$z_2 = f(z_1) = (1+2\mathrm{i}) \cdot (1+\mathrm{i}) = -1 + 3\mathrm{i}$

$z_3 = f(z_2) = (1+2\mathrm{i}) \cdot (-1+3\mathrm{i}) = -7 + \mathrm{i}$

$z_4 = f(z_3) = (1+2\mathrm{i}) \cdot (-7+\mathrm{i}) = -9 - 13\mathrm{i}$

$z_5 = f(z_4) = (1+2\mathrm{i}) \cdot (-9-13\mathrm{i}) = 17 - 31\mathrm{i}$

$z_n = (1+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})^{n-1}$

Aufgabe 4.8

(a) $f(z) = 2z + 1$

$z_1 = 1$

$z_2 = f(z_1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$z_3 = f(z_2) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

$z_4 = f(z_3) = 2 \cdot 7 + 1 = 15$

$z_5 = f(z_4) = 2 \cdot 15 + 1 = 31$

$z_n = 2^n - 1$

(b) $f(z) = 2z + 1$

$z_1 = \mathrm{i}$

$z_2 = f(z_1) = 2 \cdot \mathrm{i} + 1 = 1 + 2\mathrm{i}$

$z_3 = f(z_2) = 2 \cdot (1+2\mathrm{i}) + 1 = 3 + 4\mathrm{i}$

$z_4 = f(z_3) = 2 \cdot (3+4\mathrm{i}) + 1 = 7 + 8\mathrm{i}$

$z_5 = f(z_4) = 2 \cdot (7+9\mathrm{i}) + 1 = 15 + 16\mathrm{i}$

$z_n = 2^n - 1 + 2^{n-1} \cdot \mathrm{i}$

Aufgabe 4.9

(a) $f(z) = (1+\mathrm{i})z + 2\mathrm{i}$

$z_1 = 1$

$z_2 = f(z_1) = (1+\mathrm{i}) \cdot 1 + 2\mathrm{i} = 1 + 3\mathrm{i}$

$z_3 = f(z_2) = (1+\mathrm{i}) \cdot (1+3\mathrm{i}) + 2\mathrm{i} = -2 + 6\mathrm{i}$

$z_4 = f(z_3) = (1+\mathrm{i}) \cdot (-2+6\mathrm{i}) + 2\mathrm{i} = -8 + 6\mathrm{i}$

$z_5 = f(z_4) = (1+\mathrm{i}) \cdot (-8+6\mathrm{i}) + 2\mathrm{i} = -14$

$z_n = 3(1+\mathrm{i})^{n-1} - 2$

(b) $f(z) = (1+\mathrm{i})z + 2\mathrm{i}$

$z_1 = 2 - \mathrm{i}$

$z_2 = f(z_1) = (1+\mathrm{i}) \cdot (2-\mathrm{i}) + 2\mathrm{i} = 3 + 3\mathrm{i}$

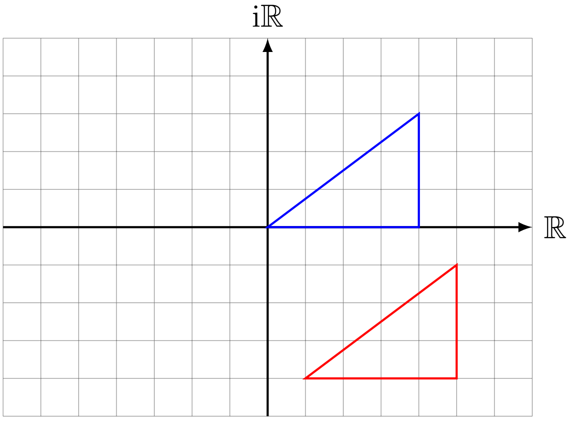
$z_3 = f(z_2) = (1+\mathrm{i}) \cdot (3+3\mathrm{i}) + 2\mathrm{i} = 8\mathrm{i}$

$z_4 = f(z_3) = (1+\mathrm{i}) \cdot 8\mathrm{i} + 2\mathrm{i} = -8 + 10\mathrm{i}$

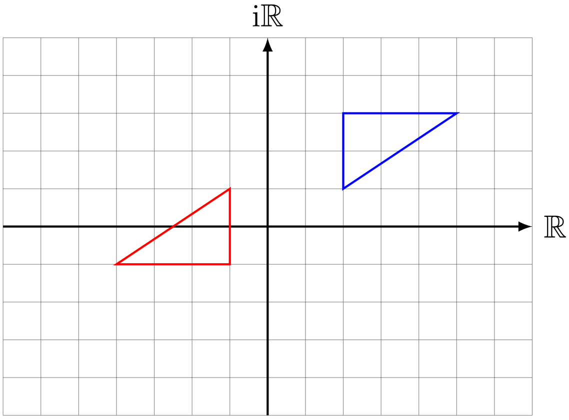
$z_5 = f(z_4) = (1+\mathrm{i}) \cdot (-8+10\mathrm{i}) + 2\mathrm{i} = -18 + 4\mathrm{i}$

$z_n = (4-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})^{n-1} - 2$

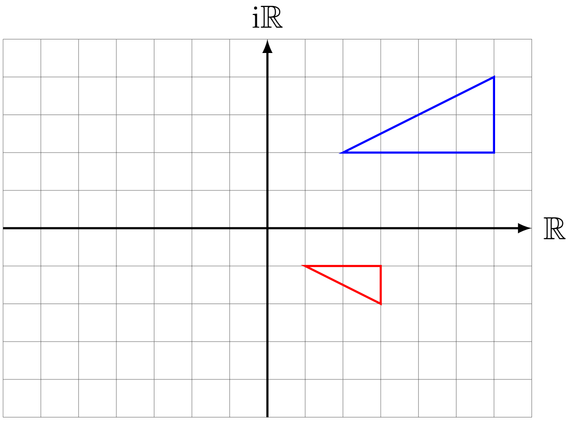
Aufgabe 5.1



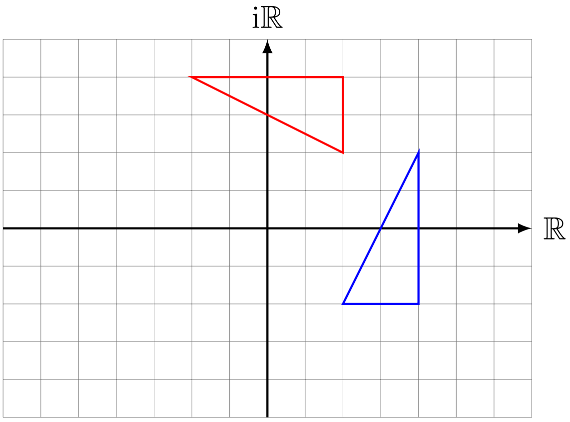
Aufgabe 5.2



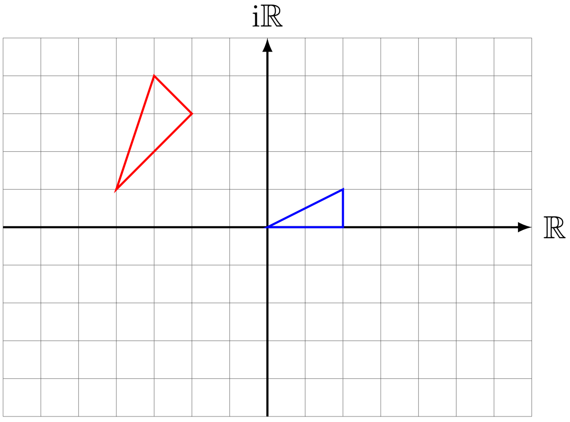
Aufgabe 5.3



Aufgabe 5.4



Aufgabe 5.5



Aufgabe 5.6

Translation um $3 + 2\mathrm{i}$

Aufgabe 5.7

zentrische Streckung mit Faktor 2

Aufgabe 5.8

Spiegelung am Ursprung

Aufgabe 5.9

Spiegelung an der reellen Achse

Aufgabe 5.10

Translation um $-4-\mathrm{i}$

Aufgabe 5.11

Punktspiegelung an O und Achsenspiegelung an der reellen Achse
$\Rightarrow$ Spiegelung an der imaginären Achse

Aufgabe 5.12

zentrische Streckung am Ursprung mit Faktor -5
ausführlicher: Drehstreckung an O mit Faktor 5 und Winkel 180°

Aufgabe 5.13

Drehung mit Zentrum 0 und Drehwinkel 90°

Aufgabe 5.14

Drehstreckung mit Zentrum 0, Faktor $\sqrt{2}$ und Winkel $-45°$

Aufgabe 5.15

$f(z) = z + 3\mathrm{i}$

Aufgabe 5.16

$f(z) = -(z - \mathrm{i}) + \mathrm{i} = -z + 2\mathrm{i}$

Aufgabe 5.17

$f(z) = 5z$

Aufgabe 5.18

$$
\begin{aligned}
f(z) &= -\big[z-(1+\mathrm{i})\big]+(1+\mathrm{i}) \\
&= -[z-1-\mathrm{i}]+1+\mathrm{i} \\
&= -z+1+\mathrm{i}+1+\mathrm{i} \\
&= -z+2+2\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5.19

$$f(z) = z-2+3\mathrm{i}$$

Aufgabe 5.20

$$f(z) = -\frac{1}{2}(z-3\mathrm{i})+3\mathrm{i} = -\frac{1}{2}z+\frac{9}{2}\mathrm{i}$$

Aufgabe 5.21

$$
\begin{aligned}
f(z) &= 2\big[z-(2+3\mathrm{i})\big]+(2+3\mathrm{i}) \\
&= 2z-4-6\mathrm{i}+2+3\mathrm{i} \\
&= 2z-2-3\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5.22

Der Fixpunkt ist das Drehzentrum (der Gesamtabbildung):

$$
\begin{aligned}
z_0 &= -2z_0-4+6\mathrm{i} \quad || +2z_0 \\
3z_0 &= -4+6\mathrm{i} \\
z_0 &= -\tfrac{4}{3}+2\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

$$\alpha = \arg a = \arg(-2) = \arctan\left(\tfrac{0}{-2}\right)+180° = 0°+180° = 180°$$

$$k = |a| = |-2| = 2$$

Aufgabe 5.23

Der Fixpunkt ist das Drehzentrum (der Gesamtabbildung):

$$
\begin{aligned}
z_0 &= -\tfrac{1}{2}\mathrm{i}z_0-7+9\mathrm{i} \quad || +\tfrac{1}{2}\mathrm{i}z_0 \\
z_0\big(1+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\big) &= -7+9\mathrm{i} \quad || \cdot \big(1-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\big) \\
z_0\big(1+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\big)\big(1-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\big) &= (-7+9\mathrm{i})\big(1-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\big) \\
z_0\cdot\tfrac{5}{4} &= -7+\tfrac{7}{2}\mathrm{i}+9\mathrm{i}+\tfrac{9}{2} \\
z_0\cdot\tfrac{5}{4} &= -\tfrac{5}{2}+\tfrac{25}{2}\mathrm{i} \quad || \cdot\tfrac{4}{5} \\
z_0 &= -2+10\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

$$\alpha = \arg a = \arg(-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}) = -90° = 270°$$

$$k = |a| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+0^2} = \tfrac{1}{2}$$

Aufgabe 5.24

$$\begin{aligned}
z_0 &= (-1+\mathrm{i})z_0 + 8\mathrm{i} \quad || - (-1+\mathrm{i})z_0 \\
\big[1-(-1+\mathrm{i})\big]z_0 &= 8\mathrm{i} \\
(2-\mathrm{i})z_0 &= 8\mathrm{i} \quad || \cdot (2+\mathrm{i}) \\
(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})z_0 &= 8\mathrm{i}(2+\mathrm{i}) \\
5z_0 &= -8+16\mathrm{i} \quad || : 5 \\
z_0 &= -1.6+3.2\mathrm{i}
\end{aligned}$$

$\alpha = \arg(-1+\mathrm{i}) = 135°$

$k = |a| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Aufgabe 5.25

$$\begin{aligned}
z_0 &= (\sqrt{3}+\mathrm{i})z_0 + 6 + 2\mathrm{i} \quad || - (\sqrt{3}+\mathrm{i})z_0 \\
\big[1-(\sqrt{3}+\mathrm{i})\big]z_0 &= 6+2\mathrm{i} \\
\big(1-\sqrt{3}-\mathrm{i}\big)z_0 &= 6+2\mathrm{i} \quad || \cdot \big(1-\sqrt{3}+\mathrm{i}\big) \\
\big[(1-\sqrt{3})^2+1\big]z_0 &= \big(6+2\mathrm{i}\big)\big(1-\sqrt{3}+\mathrm{i}\big) \\
\big[(1-2\sqrt{3}+3)+1\big]z_0 &= 6-6\sqrt{3}+6\mathrm{i}+2\mathrm{i}-2\sqrt{3}\,\mathrm{i}-2 \\
\big(5-2\sqrt{3}\big)z_0 &= 4-6\sqrt{3}+\big(8-2\sqrt{3}\big)\mathrm{i} \quad || \cdot \big(5+2\sqrt{3}\big) \\
13z_0 &= -16-22\sqrt{3}+\big(28+6\sqrt{3}\big)\mathrm{i} \\
z_0 &= \frac{-16-22\sqrt{3}}{13} + \frac{28+6\sqrt{3}}{13}\,\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Die Multiplikation mit $(5+\sqrt{3})$ sorgt dafür, dass im letzten Schritt die Nenner (13) wurzelfrei sind.

$\alpha = \arg(a) = \arg(\sqrt{3}+\mathrm{i}) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30°$

$k = |a| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$

Aufgabe 5.26

Wer den Faktor $a = 3\mathrm{i}$ nicht „erraten“ kann, greift auf die Umrechnungsformeln von der Polarform zur kartesischen Form $(r = 3, \varphi = 90°) \to (x, y)$ zurück:

$\mathrm{Re}(a) = |a| \cdot \cos(\arg a) = 3 \cdot \cos(90°) = 3 \cdot 0 = 0$

$\mathrm{Im}(a) = |a| \cdot \sin(\arg a) = 3 \cdot \sin(90°) = 3$

$a = \mathrm{Re}(a) + \mathrm{i} \cdot \mathrm{Im}(a) = 3\mathrm{i}$

Durch Einsetzen von a und dem Drehzentrum $z_0 = 0$ erhält man aus der Fixpunktgleichung der Wert der Translation b:

$$z_0 = az_0 + b$$
$$0 = 0 + b$$
$$b = 0$$

$$f(z) = 3\mathrm{i} \cdot z$$

Aufgabe 5.27

Aus der Polarform $a = (r = 5, \alpha = 120°)$ folgt mit den Umrechnungformeln:

$$\mathrm{Re}(a) = |a| \cdot \cos\arg(a) = 5 \cdot \cos(120°) = 5 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{5}{2}$$

$$\mathrm{Im}(a) = |a| \cdot \sin\arg(a) = 5 \cdot \sin(120°) = 5 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \tfrac{5}{2}\sqrt{3}$$

$$a = -\tfrac{5}{2} + \tfrac{5}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

Durch Einsetzen von a und dem Drehzentrum $z_0 = 3$ erhält man aus der Fixpunktgleichung der Wert der Translation b:

$$z_0 = az_0 + b$$
$$3 = \left(-\tfrac{5}{2} + \tfrac{5}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)3 + b$$
$$\tfrac{6}{2} = -\tfrac{15}{2} + \tfrac{15}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i} + b$$
$$b = \tfrac{21}{2} - \tfrac{15}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

$$f(z) = \left(-\tfrac{5}{2} + \tfrac{5}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)z + \tfrac{21}{2} - \tfrac{15}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

Aufgabe 5.28

Wer den Faktor $a = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$ nicht „erraten“ kann, greift auf die Umrechnungsformeln von der Polarform zur kartesischen Form $(r = 2, \varphi = 45°) \to (x, y)$ zurück:

$$\mathrm{Re}(a) = |a| \cdot \cos(\arg a) = 2 \cdot \cos(45°) = 2 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\mathrm{Im}(a) = |a| \cdot \sin(\arg a) = 2 \cdot \sin(45°) = 2 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$a = \mathrm{Re}(a) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(a) = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$$

Durch Einsetzen von a und dem Drehzentrum $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ erhält man aus der Fixpunktgleichung der Wert der Translation b:

$$\begin{aligned}
z_0 &= az_0 + b \\
1 + \mathrm{i} &= \big(\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}\big)\big(1 + \mathrm{i}\big) + b \\
b &= 1 + \mathrm{i} - \big(\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}\big)\big(1 + \mathrm{i}\big) \\
b &= 1 + \mathrm{i} - \big(\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2} - \sqrt{2}\big) \\
b &= 1 + \mathrm{i} - 2\mathrm{i}\sqrt{2} = 1 + \big(1 - 2\sqrt{2}\big)\mathrm{i}
\end{aligned}$$

$$f(z) = \big(\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}\big)z + 1 + \big(1 - 2\sqrt{2}\big)\mathrm{i}$$

Aufgabe 5.29

$g\colon 2x - y + 3 = 0$

$A = 2,\ B = -1,\ C = 3$

$b = A + B\mathrm{i} = 2 - \mathrm{i},\ c = 2C = 6$

$g\colon (2 + \mathrm{i})z + (2 - \mathrm{i})\overline{z} + 6 = 0$

Aufgabe 5.30

$g\colon x - 3 = 0$

$A = 1,\ B = 0,\ C = -3$

$b = A + B\mathrm{i} = 2,\ c = 2C = -6$

$g\colon z + \overline{z} - 6 = 0$

Aufgabe 5.31

$g\colon y = -\frac{1}{3}x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3y = -x + 12 \quad \Leftrightarrow \quad x + 3y - 12 = 0$

$A = 1,\ B = 3,\ C = -12$

$b = A + B\mathrm{i} = 1 + 3\mathrm{i},\ c = 2C = -24$

$g\colon (1 - 3\mathrm{i})z + (1 + 3\mathrm{i})\overline{z} - 24 = 0$

Aufgabe 5.32

$g\colon y + 5 = 0$

$A = 0,\ B = 1,\ C = 5$

$b = A + B\mathrm{i} = \mathrm{i},\ c = 2C = 10$

$g\colon -\mathrm{i}z + \mathrm{i}\overline{z} + 10 = 0$

Aufgabe 5.33

$g\colon (4+3\mathrm{i})z + (4-3\mathrm{i})\overline{z} + 12 = 0$

$b = (4-3\mathrm{i}) = A + B\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad A = 4,\ B = -3$

$c = 2C = 12 \quad \Rightarrow \quad C = 6$

$g\colon 4x - 3y + 6 = 0$

Aufgabe 5.34

$2z + 2\overline{z} + 3 = 0$

$b = 2 = A + B\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad A = 2,\ B = 0$

$c = 2C = 3 \quad \Rightarrow \quad C = 1.5$

$g\colon 2x + 1.5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g\colon 4x + 3 = 0$

Aufgabe 5.35

$g\colon (5+2\mathrm{i})z + (5-2\mathrm{i})\overline{z} + 4 = 0$

$b = 5 - 2\mathrm{i} = A + B\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad A = 5,\ B = -2$

$c = 2C = 4 \quad \Rightarrow \quad C = 2$

$g\colon 5x - 2y + 2 = 0$

Aufgabe 5.36

$g\colon 3\mathrm{i}z - 3\mathrm{i}\overline{z} + 9 = 0$

$b = -3\mathrm{i} = A + B\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad A = 0,\ B = -3$

$c = 2C = 9 \quad \Rightarrow \quad C = 4.5$

$g\colon -3y + 4.5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g\colon 2y - 3 = 0$

Aufgabe 5.37

- Schnittpunkt mit der reellen Achse ($z = \overline{z}$):

  $$\begin{aligned} \mathrm{i}z - \mathrm{i}\overline{z} + 8 &= 0 \\ \mathrm{i}z - \mathrm{i}z + 8 &= 0 \\ 8 &= 0 \end{aligned}$$

  Kein Schnittpunkt mit der reellen Achse.

- Schnittpunkt mit der imaginären Achse ($-z = \overline{z}$):

  $$\begin{aligned} \mathrm{i}z - \mathrm{i}\overline{z} + 8 &= 0 \\ \mathrm{i}z + \mathrm{i}z + 8 &= 0 \\ 2\mathrm{i}z + 8 &= 0 \\ z &= 4\mathrm{i} \end{aligned}$$

Aufgabe 5.38

- Schnittpunkt mit der reellen Achse ($z = \overline{z}$):

  $$\begin{aligned} (-8+\mathrm{i})z + (-8-\mathrm{i})\overline{z} - 16 &= 0 \\ (-8+\mathrm{i})z + (-8-\mathrm{i})z - 16 &= 0 \\ -16z - 16 &= 0 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

- Schnittpunkt mit der imaginären Achse ($-z = \overline{z}$):

  $$\begin{aligned} (-8+\mathrm{i})z + (-8-\mathrm{i})(-\overline{z}) - 16 &= 0 \\ 2\mathrm{i}z - 16 &= 0 \\ z &= -8\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

Aufgabe 5.39

$k\colon |z-3| = 1$

$m = 3,\ r = 1$

$c = m \cdot \overline{m} - r^2 = 3 \cdot 3 - 1 = 8$

$k\colon z\overline{z} - 3z - 3\overline{z} + 8 = 0$

Aufgabe 5.40

$|z - 2 + 2\mathrm{i}| = |z - (2 - 2\mathrm{i})| = 2\sqrt{2}$

$m = 2 - 2\mathrm{i},\ r = 2\sqrt{2}$

$c = m \cdot \overline{m} - r^2 = 2^2 + (-2)^2 - (2\sqrt{2})^2 = 8 - 8 = 0$

$k\colon z\overline{z} - (2+2\mathrm{i})z - (2-2\mathrm{i})\overline{z} = 0$
(Die Kreislinie geht durch den Ursprung.)

Aufgabe 5.41

$z\overline{z} + 2\mathrm{i}z - 2\mathrm{i}\overline{z} + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z\overline{z} - \overline{m}z - m\overline{z} + c = 0$

$m = 2\mathrm{i},\ c = 3$

$c = m\overline{m} - r^2$

$r = \sqrt{m\overline{m} - c} = \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1$

$k\colon |z - 2\mathrm{i}| = 1$

Aufgabe 5.42

$k\colon z\overline{z} + (2-\mathrm{i})z + (2+\mathrm{i})\overline{z} + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z\overline{z} - \overline{m}z - m\overline{z} + c = 0$

$m = -(2+\mathrm{i}) = -2-\mathrm{i}$, $c = 1$

$c = m\overline{m} - r^2$

$r = \sqrt{m\overline{m} - c} = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 - 1} = \sqrt{4} = 2$

$k\colon |z + 2 + \mathrm{i}| = 2$ oder $|z - (-2-\mathrm{i})| = 2$

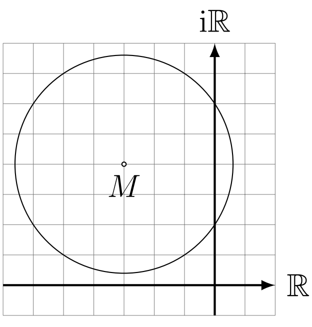
Aufgabe 5.43

- Schnittpunkte mit der reellen Achse: $z = x$

$$\begin{aligned} |x - (-3+4\mathrm{i})| &= \sqrt{13} \\ ([x+3] - 4\mathrm{i})([x+3] + 4\mathrm{i}) &= 13 \\ (x+3)^2 + 16 &= 13 \\ (x+3)^2 &= -3 \quad \text{keine Schnittpunkte mit } \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Schnittpunkte mit der imaginären Achse: $z = y\mathrm{i}$

$$\begin{aligned} |y\mathrm{i} - (-3+4\mathrm{i})| &= \sqrt{13} \\ (3 + [y-4]\mathrm{i})(3 - ([y-4]\mathrm{i}) &= 13 \\ 9 + (y-4)^2 &= 13 \\ (y-4)^2 &= 4 \\ y - 4 &= \pm 2 \\ y_1 &= 6 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 6\mathrm{i} \\ y_2 &= 2 \quad \Rightarrow \quad z_2 = 2\mathrm{i} \end{aligned}$$



Aufgabe 5.44

$z\overline{z} + 4iz - 4i\overline{z} - 9 = 0$

Schnittpunkt(e) mit der reellen Achse: ($z = \overline{z}$)

$$\begin{aligned} z^2 + 4iz - 4iz - 9 = 0 z^2 - 9 &= 0 \\ (z+3)(z-3) &= 0 \\ z_1 &= -3 \\ z_2 &= 3 \end{aligned}$$

Schnittpunkt(e) mit der imaginären Achse: ($-z = \overline{z}$)

$$\begin{aligned} -z^2 + 4iz + 4iz - 9 = 0 - z^2 + 8iz - 9 &= 0 \\ (iz+9)(iz-1) &= 0 \\ iz &= -9 \quad || \cdot (-i) \\ z_3 &= 9i \\ iz &= 1 \qquad || \cdot (-i) \\ z_4 &= -i \end{aligned}$$

Aufgabe 5.45

Umkehrfunktion von $f(x) = (2 - \mathrm{i})z = w$:

$f^{-1}(w) = \dfrac{w}{2 - \mathrm{i}} = z$

$g\colon x + y - 1 = 0$ (Koordinatenform)

$A = 1$, $B = 1$, $C = -1$

$b = A + B\mathrm{i} = 1 + \mathrm{i}$, $c = 2C = -2$

$g\colon (1 - \mathrm{i})z + (1 + \mathrm{i})\overline{z} - 2 = 0$ (komplexe Form)

$z = \dfrac{w}{2 - \mathrm{i}}$ und $\overline{z} = \dfrac{\overline{w}}{2 + \mathrm{i}}$ oben einsetzen:

$$\frac{(1-\mathrm{i})w}{2-\mathrm{i}} + \frac{(1+\mathrm{i})\overline{w}}{2+\mathrm{i}} - 2 = 0 \quad || \cdot (2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})$$

$$\begin{aligned} (1-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})w + (1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})w + 2 \cdot 5 &= 0 \\ g'\colon (3-\mathrm{i})w + (3+\mathrm{i})\overline{w} - 10 &= 0 \quad \text{(komplexe Form)} \\ g'\colon 3u + v - 5 &= 0 \quad \text{(Koordinatenform)} \end{aligned}$$

$k\colon |z - 2\mathrm{i}| = 1$ (Betragsform)

$m = 2\mathrm{i}$, $\overline{m} = -2\mathrm{i}$, $r = 1$

$c = m \cdot \overline{m} - r^2 = 4 - 1 = 3$

$k\colon z\overline{z} + 2\mathrm{i}z - 2\mathrm{i}\overline{z} + 3 = 0$ (betragsfreie Form)

$z = \dfrac{w}{2 - \mathrm{i}}$ bzw. $\overline{z} = \dfrac{\overline{w}}{2 + \mathrm{i}}$ oben einsetzen:

$$\frac{w\overline{w}}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})} + \frac{2\mathrm{i}w}{2-\mathrm{i}} - \frac{2\mathrm{i}\overline{w}}{2-\mathrm{i}} + 3 = 0 \quad || \cdot (2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})$$

$$w\overline{w} + 2i(2+\mathrm{i})w - 2\mathrm{i}(2-\mathrm{i})\overline{w} + 15 = 0$$

$$k'\colon w\overline{w} - (2-4\mathrm{i})w - (2+4\mathrm{i})\overline{w} + 15 = 0$$

$$k'\colon |w - (2+4\mathrm{i})| = \sqrt{5}$$

Aufgabe 5.46

Bestimmung der Umkehrfunktion f^{-1}:

$f(z) = (-1+\mathrm{i})z + (3+\mathrm{i}) = w$

$f^{-1}(w) = \dfrac{w-3-\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1} = z$

Aufgabe 5.46

Gleichung der imaginären Achse: $g\colon x = 0$ (Koordinatenform)

$A = 1$, $B = 0$, $C = 0$

$b = A + B\mathrm{i} = 1$, $c = 2C = 0$

$g\colon z + \overline{z} = 0$ (komplexe Form)

$z = \dfrac{w-3-\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}$ und $\overline{z} = \dfrac{\overline{w}-3+\mathrm{i}}{-1-\mathrm{i}}$ einsetzen:

$$\frac{w-3-\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}} + \frac{\overline{w}-3+\mathrm{i}}{-1-\mathrm{i}} = 0 \quad || \cdot (-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})$$

$$(-1-\mathrm{i})(w-3-\mathrm{i}) + (-1+\mathrm{i})(\overline{w}-3+\mathrm{i}) = 0$$

$$g'\colon (-1-\mathrm{i})w + (-1+\mathrm{i})\overline{w} + 4 = 0 \quad \text{(komplexe Form)}$$

$$g'\colon u - v - 2 = 0 \quad \text{(Koordinatenform)}$$

$k\colon |z| = 2$ (Betragsform)

Da es sich bei $f(z) = (-1+\mathrm{i})z + (3+\mathrm{i}) = w$ um eine Ähnlichkeitsabbildung handelt, wird der Mittelpunkt $m = 0$ von k auf $m' = f(0) = 3+\mathrm{i}$ abgebildet.

Darüber hinaus enthält die lineare Abbildung den Streckungsfaktor $a = |-1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$, weshalb der Bildradius $r' = 2\sqrt{2}$ beträgt.

Daraus folgt: $k' = |w - (3+\mathrm{i})| = 2\sqrt{2}$ (Betragsform)

Aufgabe 5.47

Abbildung: $f(z) = 1/\overline{z} = w$.

Umkehrabbildung: $f^{-1}(w) = 1/\overline{w}$

$(1-\mathrm{i})z + (1+\mathrm{i})\overline{z} + 4 = 0$ (Gerade nicht durch Ursprung)

$$(1-\mathrm{i})\frac{1}{\overline{w}} + (1+\mathrm{i})\frac{1}{w} + 4 = 0 \quad || \cdot \overline{w}w$$

$$(1-\mathrm{i})w + (1+\mathrm{i})\overline{w} + 4w\overline{w} = 0 \quad || : 4$$

$$w\overline{w} - \big(-\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\mathrm{i}\big)w - \big(-\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\mathrm{i}\big)\overline{w} = 0$$

$m = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\mathrm{i}$

$c = 0 = m \cdot \overline{m} - r^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\big|w - \big(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\mathrm{i}\big)\big| = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (Kreis durch Ursprung)

Aufgabe 5.48

Abbildung: $f(z) = 1/z = w$

Umkehrabbildung: $f^{-1}(w) = 1/w = z$

$z\overline{z} - (3-\mathrm{i})z - (3+\mathrm{i})\overline{z} + 6 = 0$ (Kreis nicht durch 0)

$$\frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\overline{w}} - (3-\mathrm{i})\frac{1}{w} - (3+\mathrm{i})\frac{1}{\overline{w}} + 6 = 0 \quad || \cdot \overline{w}w$$

$$1 - (3-\mathrm{i})\overline{w} - (3+\mathrm{i})w + 6w\overline{w} = 0 \quad || : 6$$

$$w\overline{w} - \big(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}\mathrm{i}\big)w - \big(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6}\mathrm{i}\big)\overline{w} + \tfrac{1}{6} = 0$$

$m = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\mathrm{i}$

$r^2 = m \cdot \overline{m} - c = \big(\frac{1}{4} + \frac{1}{36}\big) - \frac{1}{6} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$\big|w - \big(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\mathrm{i}\big)\big| = \frac{1}{3}$ (Kreis nicht durch 0)